

Kombinatorické etudy 4 – ZS 2011/2012

1. (3.6) Uvažme bankovní sejf s n trezory, ke každému patří jiný klíč. Někdo umístí do trezorů náhodně příslušných n klíčů (do každého trezoru jeden klíč) a pak trezory zavře. Pokud násilně otevřeme k trezorů, jaká je pravděpodobnost, že se získanými klíči budeme moci odemknout všechny ostatní?

Pro suchary: Jaká je pravděpodobnost, že v náhodné permutaci cykly procházející čísly $1, 2, \dots, k$ pokrývají všechny body?

2. (6.30) Řekneme, že hrana se hodí k cyklu C pokud je součástí C nebo nemá s C společný ani vrchol. Uvažme nyní párování M (ne nutně perfektní) v hranově 2-souvislém grafu G . Ukažte, že existuje cyklus k němuž se hodí všechny hrany z M .

3. (9.19 – z minula zbývá jeden směr části (b) – zkuste nápovědu)

(a) Buď G graf K_4 s podrozdělenou jednou hranou. Je G indukovaný podgraf nějakého kriticky 4-barevného grafu?

(b) Graf G je podgraf (nebo indukovaný podgraf) nějakého kriticky $(k + 1)$ -barevného grafu právě tehdy, když pro každou hranu e platí $\chi(G/e_0) \leq k$.

4. (11.35) (zbylo z minula – první část je hotova – poslední šance!) (Popis toho, jak fungují náhodné procházky po grafech – viz minule. Uvažujeme jen souvislé grafy!)

(a) Najděte takovou distribuci pro v_0 (počáteční stav), že distribuce v_k (k -tého kroku) je stejná pro všechna k (tzv. stacionární rozdělení).

(b) Dokažte, že stacionární rozdělení je právě jedno.

(c) Pokud G není bipartitní, tak (pro každé v_0) rozdělení v_k konverguje ke stacionárnímu rozdělení. Pro bipartitní grafy to neplatí (leďa by G měl jen jeden vrchol).

5. (14.9)

(a) Ukažte, že 2-obarvení roviny nemusí obsahovat rovnostranný trojúhelník s hranou délky 1 a všemi vrcholy téže barvy.

(b) Naproti tomu 2-obarvení roviny vždy obsahuje trojúhelník s hranami $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ a π , který má všechny vrcholy téže barvy.

6.

(a) Ukažte, že každý graf s průměrným stupněm d obsahuje podgraf s *minimálním* stupněm alespoň $d/2$.

(b) Ukažte, že každý graf s průměrným stupněm d obsahuje *bipartitní* podgraf s *průměrným* stupněm alespoň $d/2$.

Nápověda na: <http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/>