Kombinatorické etudy 2 – ZS 2011/2012

1. (3.4) Zvolíme náhodnou permutaci čísel 1, 2, …, n. Jaká je pravděpodobnost, že 1 a 2 jsou ve stejném cyklu?

2. (6.28) Každý hranově 2-souvislý graf lze vytvořit z kružnice postupným přidáváním "uší". Pořádně: graf G je sjednocením $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$, kde G_1 je kružnice, a každý G_i ($i > 1$) je buď cesta, která má s $G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1}$ společné jen své konce, nebo kružnice, která má s $G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1}$ společný jeden vrchol.

3. (9.18) Nechť graf G je kriticky k-barevný (definice viz minule). Vyrobíme nový graf G': začneme s G, pro každý vrchol x grafu G vyrobíme nový vrchol x', který bude mít stejné sousedy jako jsou původní sousedé x v G. Na závěr přidáme vrchol y, který spojíme se všemi vrcholy x'. Ukažte, že G' je kriticky $(k+1)$-barevný.

4. (11.35) (Popis toho, jak fungují náhodné procházky po grafech – viz minule.)

(a) Najděte takovou distribuci pro v_0 (počáteční stav), že distribuce v_k (k-tého kroku) je stejná pro všechna k (tzv. stacionární rozdělení).

(b) Dokažte, že stacionární rozdělení je právě jedno.

(c) Pokud G není bipartitní, tak (pro každé v_0) rozdělení v_k konverguje ke stacionárnímu rozdělení. Pro bipartitní grafy to neplatí (leda by G měl jen jeden vrchol).

5. (14.8) * Obarvíme každý z bodů v rovině jednou ze dvou barev. Předpokládejte, že existuje rovnostranný trojúhelník s hranou 1, jehož všechny vrcholy mají stejnou barvu (stručně: jednobarevný rovnostranný trojúhelník s hranou 1). Ukažte, že pro každé $a, b > 0$ splňující trojúhelníkovou nerovnost existuje jednobarevný trojúhelník s hranami 1, a, b. (Aby existoval vůbec nějaký takový trojúhelník, musí být $|a-b| < 1 < a+b$. Cílem je ukázat, že existuje i jednobarevný takový trojúhelnik.)

6. Zůstalo z minula:

Pro co nejmenší $\alpha > 0$ nalezněte obarvení vrcholů grafu červeně a modře, aby α-násobek všech hran měl oba konce červené **a současně** nejvýše α-násobek hran měl oba konce modré. Optimální (proč?) je $\alpha = 1/3$.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`