Kombinatorické etudy 7 – LS 2011/2012

1. (4.7) Exponenciální vytvořující funkce pro T_n (počet stromů na vrcholech $\{1,\dots,n\}$) je dána vztahem $t(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{T_n}{(n-1)!} x^n$. Ukažte, že $t(x)$ splňuje rovnici $t(x)e^{-t(x)} = x$. Odvoďte odsud Cayleyho formuli $T_n = n^{n-2}$.

2. (6.49) Ukažte, že kriticky hranově k-souvislý graf má vrchol stupně k.

3. (10.15 – zbývá druhá část)

- Zkonstruujte $(p+1)$-regulární graf s $2(p^2+p+1)$ vrcholy a obvodem 6 (p je prvočíslo).
- Zkonstruujte $(p+1)$-regulární graf s $2(p^3+p^2+p+1)$ vrcholy a obvodem 8 (p je zase prvočíslo). (Srovnejte též s příkladem z Komb. etud 2.)

4. (11.42) Označme $a(u,v)$ střední dobu, za kterou náhodná procházka z u dojde do v.

- * Dokažte, že pro každé tři vrcholy u, v, w platí

$$a(u,v) + a(v,w) + a(w,u) = a(u,w) + a(w,v) + a(v,u)$$

- Ukažte, že vrcholy grafu mohou být lineárně uspořádány tak, že když u předchází v, tak $a(u,v) \leq a(v,u)$.

5. (14.12) Pro každé k a r existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ a libovolné k-obarvení čísel $\{1,\dots,n\}$ existuje v jedné z barev r-rozměrný kvádr. Tím kvádrem rozumíme množinu 2^r čísel danou parametry a, d_1, …, d_r. Kvádr obsahuje všechna čísla

$$\{a + \sum_i c_i d_i : c_1,\dots,c_r \in \{0,1\}\},$$

přičemž požadujeme, aby celý kvádr ležel v $\{1,\dots,n\}$.

6. (12.14) Graf G je r-regulární, souvislý a má tranzitivní grupu automorfismů. Ukažte, že G je hranově r-souvislý.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`