Kombinatorické etudy 5 – LS 2011/2012

1. (4.6 – zbývá odvodit rekurentní formuli) Označme T_n počet stromů s vrcholy $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že platí

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k} \,.$$

Odvoďte odsud Cayleyho formuli ($T_n = n^{n-2}$).

(1.44 – hodí se k tomu odvození – první část už máme)

Dokažte tzv. Abelovy identity

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k} = (x+y+n)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+k)^{k-1}(y+n-k)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y+n)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}$$

2. Buď G hranově k-souvislý graf, přičemž k je liché. Dokažte, že existuje strom T a zobrazení $f : V(G) \to V(T)$ tak, že dvojice (T, f) popisuje všechny hranové k-řezy v grafu G následujícím způsobem.

Pro hranu e v T označíme V_1, V_2 množiny vrcholů komponent $T - e$, a označíme $C(e)$ množinu hran G mezi $f^{-1}(V_1)$ a $f^{-1}(V_2)$. Pak platí

- pro všechny e je $|C(e)| = k$ (každé $C(e)$ je k-řez) a
- dostaneme takto všechny k-řezy.

3. (10.14)

Nechť G je r-regulární ($r \geq 2$) graf s obvodem alespoň g, který má $2n$ vrcholů, přičemž $n \geq 2r^g$. Ukažte, že ke G lze přidat hrany (a nechat stejnou množinu vrcholů) tak, že vznikne $(r+1)$-regulární graf s obvodem alespoň g.

4. (11.41) Pravděpodobnost, že náhodná procházka z u navštíví v před návratem do u je rovna $\frac{2m}{\deg(u)\kappa(u,v)}$. ($\kappa(u,v)$ značí střední dobu návratu mezi u a v: tj. střední dobu trvání náhodné procházky, která vyjde z u, projde v a vrátí se zpět do u).

5. (14.31a) Dokažte, že pro každé m existuje K takové, že kdykoli máme K bodů v rovině v obecné poloze, tak mezi nimi lze vybrat m vrcholů konvexního mnohoúhelníka.

6. Každá z $n \geq 4$ drben zná jeden drb, který nikdo jiný nezná. Mluví spolu jen po telefonu a při každém hovoru si navzájem sdělí všechny drby, které znají. Ukažte, že je potřeba alespoň $2n - 4$ hovorů, než všechny vědí všechno.

Nápověda na: `http://kam.mff.cuni.cz/~samal/vyuka/ke/`