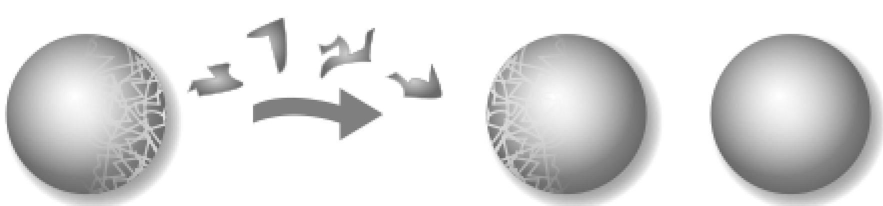
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzity Karlovy v Praze

Stručné poznámky z MA4
LS 2011/2012

Proseminář z matematické analýzy

Zapisovatelé:
Zúčastnění posluchači

Přednášející:
Mgr. Robert Šámal, Ph.D.



Tento text se vztahuje k předmětu NMAI068 – *Proseminář z matematické analýzy* tak, jak jej v LS 2011/12 přednášel R. Šámal. Na zápisu se podílejí jednotliví studenti, viz údaj u jednotlivých poznámek. Upozornění na chyby, nepřesnosti atd. jsou vítány.

1 Úvod do ODR (1.3.2012) *Zapsal(i): Duc Trung Ha & David Pěgřímek*

1.1 Úvod, přehled.

♠ Obyčejné diferenciální rovnice
aneb co by měl každý správný „matfyzák" znát!

♡ Funkcionální analysa
aneb lze skloubit algebru s matematickou analysou?

♣ Teorie míry a Lebesgueův integrál
aneb jak matematicky popsat obsah a objem; jak rozsekat hrášek, aby z něho šlo postavit slunce, a jak to vše souvisí s níže uvedeným obrázkem?[1]

♢ Další témata dle zájmů studentů
aneb co se jinam nevešlo...

1.2 Obyčejné diferenciální rovnice: co jsou a proč jsou.

V této části se budeme zabývat *obyčejnými diferenciálními rovnicemi*[2] a metodami používanými k jejich vyřešení.

Definice 1.1. *Značení* $f^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{n}}(x)$, *někdy též* $f^{(n)}(x)$, $f^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{n}}$ *či jen* $f^{(n)}$, *bude přirozeně značit* n*-tou derivaci funkce* f *podle* x. *Přesná induktivní definice jest*

$$f^{(n)}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{iff } n = 0 \\ [f^{(n-1)}(x)]' & \text{iff } n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

1.2.1 Motivační příklad

Příklad. *Najděte funkci* $y(x)$ *(tj. funkci* y *v proměnné* x*) takovou, že*

$$y' + 2xy = 0$$

Řešení. Jako „správní matfyzáci" si výsledek tipneme[3] a uvidíme, jestli odpovídá zadání:

$$y(x) = c \cdot e^{-x^2},$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a konstantní parametr $c \in \mathbb{R}$.

[1] Na obrázku je znázorněn „Banachův-Tarskiho paradox".
[2] zkráceně *ODR*
[3] Ve skutečnosti jsme k němu došli výpočtem, ale zatím nepředbíhejme.

Pro kontrolu dosadíme:

$$y'(x) + 2xy = (c \cdot e^{-x^2})' + 2xy = c \cdot e^{-x^2}(-2x) + 2x(c \cdot e^{-x^2}) = 0.$$

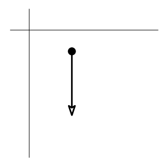
Tipli jsme si tedy správně. Ale jsou to skutečně všechna možná řešení?

1.2.2 Aplikace ODR

1. **volný pád**
   Budeme zkoumat pohyb padajícího míčku v různých prostředích a v různém směru letu.

   (a) **Varianta „vakuum“**

   Příklad 1.2. *Upustíme míček ve vakuu (tedy zanedbáváme tření a jiné nepříjemnosti).*

   Buď $y(t)$ funkce hloubky (vzhledem k počáteční výšce) v závislosti na čase. Slavný Druhý Newtonův pohybový zákon tvrdí, že

   $$\mathbf{F} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{a},$$

   kde $\mathbf{F}$ a m jsou (z pohledu matematika) nezajímavé konstanty. Ovšem zrychlení $\mathbf{a}$ lze vyjádřit jako

   $$\mathbf{a} = -y''$$ [4]

   Protože $\mathbf{F}$ a m jsou konstantní, snadno nahlédneme

   $$y'' = c, \text{pro } c > 0.$$

   Těmto rovnicím se říká *ODR 2. řádu*, neb se v nich vyskytuje 2. derivace jako nejvyšší ze všech derivací.

   (b) **Varianta „ve vzduchu“**

   Příklad 1.3. *Upustíme míček tentokrát ve vzduchu (tedy tření a jiné nepříjemnosti už nám tolik nevadí, proto s nimi i počítáme).*

   Lze přijít na to (experimentálně či vlastní vírou), že odpor vzduchu je přímo úměrný čtverci rychlosti, v matematické notaci

   $$\uparrow \text{odpor} \sim \uparrow (y')^2.$$

   Ten očividně v lineárně míře snižuje zrychlení pádu, konkrétně

   $$y'' = c - k \cdot (y')^2,$$

   kde $c > 0$ je konstanta z předchozí varianty úlohy a $k > 0$ je nějaká nová konstanta (míry vlivu odporu vzduchu na pád).

[4] Znaménko „−“ je pro správný směr vektoru zrychlení.

(c) **Varianta „z dálky“**

Příklad 1.4. *Nyní upustíme míček z velké dálky, lépe řečeno z „vysoké výšky“ (jakoby z kosmu).*

Buď $y(t)$ funkce vzdálenosti míčku od středu Země[5] v závislosti na čase. Snadno se nahlédne (ale důkaz přenechme fysikům), že

$$y'' = \frac{c}{y^2}.$$

2. **vývoj populace**
Buď $y(t)$ funkce počtu jedinců (bakterií, králíků, uživatelů Facebooku...) v čase t. Můžeme pak vývoj takové populace modelovat několika způsoby, např. jednoduchou *ODR 1. řádu*[6]

$$y' = c \cdot y$$

či „propracovanější“ *ODR 1. řádu* beroucí i v potaz omezení shora (velikost Petriho misky, rozloha pastviny, kapacita Internetu...)

$$y' = c \cdot (K - y),$$

kde K bude representovat tento horní strop pro kardinalitu populace.

3. **vedení tepla**
Buď $u(x, t)$ funkce teploty v čase t a v bodě x (pro jednoduchost uvažujme 1-rozměrný případ – i tak to bude složité ažaž). Vedení tepla lze modelovat „parciální diferenciální rovnicí“ (obsahující parciální derivace)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Uvědomíme-li si, co je to z fysikálního hlediska „tok tepla“, okamžitě nás napadne závislost

$$\uparrow \text{tok} \sim \uparrow \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nakonec nahlédneme, jak souvisí změna energie v daném bodě s tokem tepla, a dosadíme takto:

$$\uparrow \Delta\text{Energie} \sim \uparrow \frac{\partial}{\partial x}\text{toku} \sim \uparrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Poznámka: Dosti podobným jevem ze světa finančnictví a cenných papírů je takzvaná „Blackova-Scholesova rovnice“ modelující hodnotu opcí evropského typu.

1.3 Řešení základních typů.

Příklad 1.5. *Vyřešte ODR 2. řádu*

$$y''(t) = c$$

pro nějakou pevně danou konstantu $c \in \mathbb{R}$.

[5] jakožto planety Země s velkým počátečním písmenem v názvu
[6] diferenciální rovnicí s 1. derivací jakožto nejvyšší

Tuto úlohu snadno vyřeší i student 1. ročníku Informatiky na MFF UK. Nejde totiž o nic „světoborného“, pouze se dvakrát nalezne primitivní funkce:

$$y'(t) = c \cdot t + d$$
$$y(t) = \frac{c \cdot t^2}{2} + d \cdot t + e$$

Tento příklad je spíše ilustrativní. Znázorňuje 1 z možných cílů, kterých chceme při řešení ODR dosáhnout – rovnici přímo vyřešit.

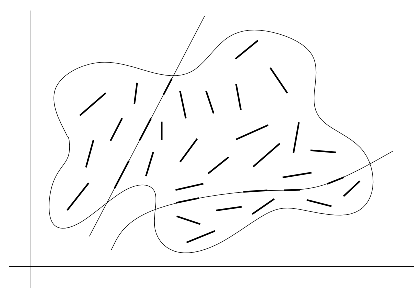
Na zcela opačném konci spektra obtížnosti leží 1 ze 7 *miléniových problémů*, tzv. „Navierovy-Stokesovy rovnice“ (konkrétně rozhodnout, zda-li jsou vždy řešitelné).

Řešení tohoto otevřeného problému je asi stejně triviální jako rozřešit problém „P vs. NP“ či dokázat „Riemannovu hypotesu“ – tedy úloha pro studenta Bc. studia na MFF UK těžká více než dost.[7]

Tyto rovnice jsou na druhou stranu ukázkou jiného cíle při řešení diferenciálních rovnic, tedy spíše analysovat vlastnosti (neboť úplné vyřešení by bylo příliš obtížné).

Definice. *ODR (1. řádu) je rovnice tvaru „$y' = f(x,y)$“ pro $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Přesněji se snažíme pro nějaký interval $J \subseteq \mathbb{R}$ nalézt funkci $y(x) : J \to \mathbb{R}$ takovou, že $y'(x) = f(x, y(x))$ při $(x, y(x)) \in D$.*

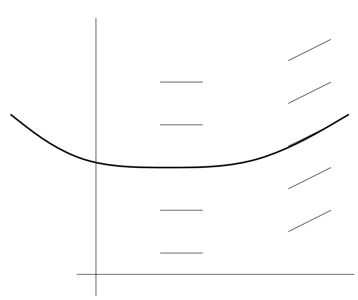
Na obrázku to lze nahlédnout tak, že na oblasti D máme zadané tzv. „směrové pole“ (znázorňující požadované náklony případných tečen v daných bodech). Snažíme se jím „protáhnout“ nějakou funkci, tak aby tečny v každém bodě respektovaly zadání směrového pole.



Poznámka: Toto byl tzv. „explicitní zápis“ ODR. „Implicitním zápisem“ ODR (obecně n-tého řádu) je míněna rovnice $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$.

1. typ: $y' = f(x)$ (primitivní funkce)

V každé x-ové souřadnici je funkcí $f(x)$ pevně zadána žádaná směrnice[8] funkce $y(x)$. To je znázorněno na následujícím obrázku:



[7] Ovšem ne úplně nemožné, jak lze vidět z příkladu dnes již vyřešené „Poincarého domněnky“.

[8] tangens úhlu naklonění tečny v příslušném bodě

Tento typ známe již z MA2, jedná se o tzv. „primitivní funkce“. Ty jsou jednoznačně dány *až* na konstantu:

$$y(x) = \int f(x) + C$$

pro $C \in \mathbb{R}$.

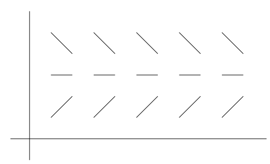
Při řešení ODR máme však často zadány i počáteční podmínky (původní počet bakterií, králíků, uživatelů Facebooku...) a to ve tvaru $y(x_0) = y_0$. To nám pomůže pro určení jednoznačné primitivní funkce **včetně** konstanty:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)$$

Všimněme si, že můžeme provést „pseudokontrolu“ korektnosti při dosazení krajní hodnoty $x := x_0$ a že povede ke správné počáteční podmínce.

2. typ: $y' = g(y)$ (jistě ne primitivní funkce)

Uvědomme si, že jde o velice podobnou úlohu jako předtím – v každé tentokrát y-ové souřadnici je funkcí $g(y)$ pevně zadána žádaná směrnice pro funkci $y(x)$. Obrázkově:



Pro $g(y) \equiv 0$ je situace velice jednoduchá. Rovnice se zjednoduší na $y'(x) = 0$, tedy funkce má lokální minimum i maximum v každém bodě, neboli lidsky řečeno je *konstantní*.

Pro $g(y) \not\equiv 0$ si ukážeme (mnemotechnický) postup řešení, jaký používají engineeři a economové. Rozepíšeme funkci y' jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y).$$

Protože $g(y) \not\equiv 0$, můžeme prohodit pravou stranu a jmenovatel

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \mathrm{d}x$$

a přirozeně nás napadne zintegrovat obě strany

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int \mathrm{d}x.$$

Označíme-li primitivní funkci z levé strany jako $H(y)$,[9] získáme finální tvar

$$H(y) = x + C,$$

pro $C \in \mathbb{R}$. To vypadá poněkud typově špatně, ale rovnice ve skutečnosti obsahuje pouze funkce v proměnné x takto

$$H(y(x)) = x + C.$$

[9] Pozor, nepleťte si s funkcí entropie!

Příklad 1.6.

$$
\begin{aligned}
y' &= -2y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2y \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{-2y} &= \int \mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{-2y} &= x + C \\
\ln|y| &= -2x - 2C \\
y &= \pm e^{-2x+k} \\
y &= A \cdot e^{-2x},
\end{aligned}
$$

kde $k \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jsou nějaké nezajímavé konstanty. Tudíž $y = A \cdot e^{-2x}$ pro $A \in \mathbb{R}$ jsou řešení této ODR. Vyvstává přirozená otázka: „Jsou všechna?“ – Ano.

Důkaz. (nástin důkazu) Nahlédneme, že

$$(y(x) \cdot e^{2x})' = \underbrace{y'}_{=-2y} \cdot e^{2x} + y \cdot 2 \cdot e^{2x} = 0,$$

neboli $y(x) \cdot e^{2x}$ musí být nutně konstantní (pro $y(x)$ splňující danou ODR). Ta v našem případě odpovídá výše uvedené konstantě A. □

Nyní se vrátíme zpátky do kůží „matfyzáků“ a ukážeme si (aspoň náznakem), proč tato metoda vůbec může fungovat.

Důkaz. (nástin důkazu) Hledáme $y = \varphi(x)$ <::::::> $x = \varphi^{-1}(y)$. Aplikací věty *o derivaci inversní funkce* z MA1 dostaneme

$$x' = [\varphi^{-1}(y)]' = \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{1}{g(y)},$$

kde druhá rovnost je zmiňovaná derivace inversní funkce a poslední rovnost jsme získali ze zadání ODR. Tedy můžeme nyní korektně zintegrovat obě strany. □

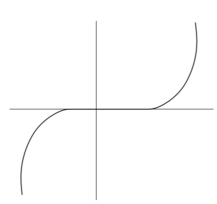
Ukázka (ne)jednoznačnosti.

Příklad 1.7.

$$y' = \sqrt{|y|}$$

BÚNO $y > 0$.

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{y} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} &= \int \mathrm{d}x = x + C \\
y &= \frac{(x+c)^2}{4}
\end{aligned}
$$

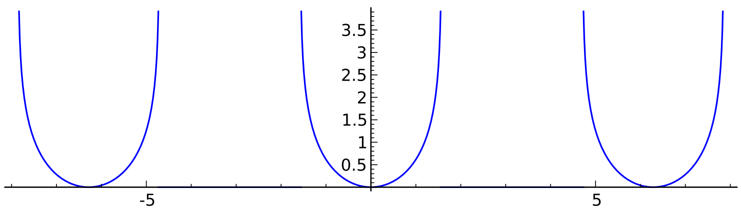


Pokračování příště...

2 Pokračování v ODR (8.3.2012)
Zapsal(i): Lukáš Lánský

3. typ: $y' = f(x)g(x)$ (ODR se separovanými proměnnými)

Inženýrsky:
Příkladem:
Zatím jsme neviděli, že by řešení tak hodně záleželo na konstantě – graf funkce pro $c = 0$ vypadá takto:



Pro $c = 1$ už je ale tvořen jen izolovanými body. Definiční obor je, přesně řečeno:

$$\begin{aligned} c > 1 &: D_{y_c} = \emptyset \\ c = 0 &: D_{y_c} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \\ c < -1 &: D_{y_c} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pevné body

Definice. *Úplný metrický prostor je takový m. p., kde každá cauchyovská posloupnost konverguje.*

Připomeňme si, že:

- *Metrický prostor* je dvojice z množiny *bodů* M a *metriky*, což je nějaká funkce $\rho : M \times M \mapsto \mathbb{R}_0^+$, pro kterou platí $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ a $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
- Posloupnost bodů x_n v daném metrickém prostoru *konverguje* do bodu x, pokud limita $\lim \rho(x_n, x)$ existuje a je rovná nule.
- Posloupnost bodů je *cauchyovská*, když

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n > n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Obvyklými množinami, na kterých metrické prostory sídlí, jsou $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^n$ (reálné vektory), nebo $\mathbb{C}[0, 1]$ (spojité funkce na uzavřeném intervalu). Obvyklá metrika v $\mathbb{R}^n$ je ta euklidovská, kde se vzdálenosti počítají jako v obvyklém euklidovském n-rozměrném prostoru. Dá se pracovat i s metrikou maximovou, kde se uvažuje maximální rozdíl mezi souřadnicemi, nebo součtovou, kde se tyto rozdíly sčítají.
Neformálně řečeno: jediný důvod, proč by cauchyovská posloupnost nemohla konvergovat je, pokud v místě, kam se její hodnota blíží, chybí bod. Slavným příkladem jsou *díry* v racionálních číslech – můžeme konstruovat posloupnosti bodů, které se neomezeně blíží nějakému iracionálmu číslu, třeba vhodné odmocnině. Ty jsou pak zároveň cauchyovské a nekonvergující.

Definice. *Pro daný m. p.* (X, ρ) *je funkce* $f : X \mapsto X$ kontrakce*, pokud*

$$\exists c \in [0, 1), \forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \leq c \cdot \rho(x, y)$$

Můžeme tomu říkat i c-lipschitzovskost.

Věta 2.1. *Buď* (X, ρ) *úplný metrický prostor a* f *kontrakce. Banachova věta o kontrakci zaručuje ekvivalenci následujících tvrzení:*

1. f *má pevný bod, tj.* $\exists x : f(x) = x$
2. *Pevný bod je právě jeden.*
3. *Když* x *je pevný bod,* $\forall x_0, x_n = f(x_{n-1}) : \lim x_n = x$*.*

Důkaz druhého bodu je snadný: kdyby existovaly dva pevné body $f(x) = x$, $f(y) = y$, muselo by je kontrahující zobrazení přitáhnout, což se neslučuje s jejich pevností. Formálně, mějme definici kontrahujícího zobrazení aplikovanou na tyto dva body: $\rho(f(x), f(y)) \leq c \cdot \rho(x, y)$. To můžeme hned přepsat jako $\rho(x, y) \leq c \cdot \rho(x, y)$, tedy $1 \leq c$, což je ale pravý opak toho, jak má c v definici v kontrahujícího zobrazení vypadat.

3 (15.3.2012)

Zapsal(i): Jan Kolárik

4 Příklady ODR (22.3.2012) *Zapsal(i): Tomáš Filípek*

Př.:
$u' = c.u.(b-u)$ ... rovnice popisující růst populace

$$\frac{du}{dt} = u' = c.u.(b-u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u(b-u)} = cdt$$

$$\int ... = \int ...$$

Výpočet:
PS: $\int c\mathrm{d}t = ct$
Počáteční podm.: $u(0) = u_0$

$$\int_{u(0)}^{u(\tau)} \frac{\mathrm{d}u}{u(b-u)} = \int_{u(0)}^{u(\tau)} c\,\mathrm{d}t = c\tau$$

$$\frac{1}{u(b-u)} = \frac{\frac{1}{b}}{u} + \frac{\frac{1}{b}}{b-u}$$

$$\int_{u(0)}^{u(\tau)} (\frac{\frac{1}{b}}{u} + \frac{\frac{1}{b}}{b-u}) = [\frac{1}{b}log|u| - \frac{1}{b}log|b-u|]_{u_0}^{u(\tau)}$$

$$\frac{1}{b}(log|\frac{u(\tau)}{b-u(\tau)}| - log|\frac{u_0}{b-u_0}|) = c\tau$$

$$log|\frac{u(\tau)}{b-u(\tau)}| = bc\tau + K, kde\, K = log|\frac{u_0}{b-u_0}|$$

$$\frac{u(\tau)}{b-u(\tau)} = e^{bc\tau+K}$$

$0 < u < b \Rightarrow$

$$\frac{u(\tau)-b+b}{b-u(\tau)} = -1 + \frac{b}{b-u(\tau)}$$

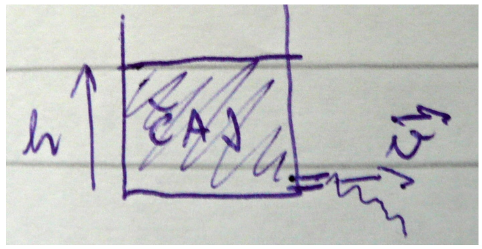
$$u(\tau) = b - \frac{b}{1+e^{bc\tau+K}}$$

Chová se "hezky"- c určuje tempo růstu (zřejmě c¿0), b hranici zalidnění.

Př.: (z fyziky)
volný pád s odporem
Dvě varianty:
a) $v' = g - cv$ ... lineární ODR
b) $v' = g - cv^2$ ... hůře řešitelné obecně

Př.:
kyblík s dírou u dna

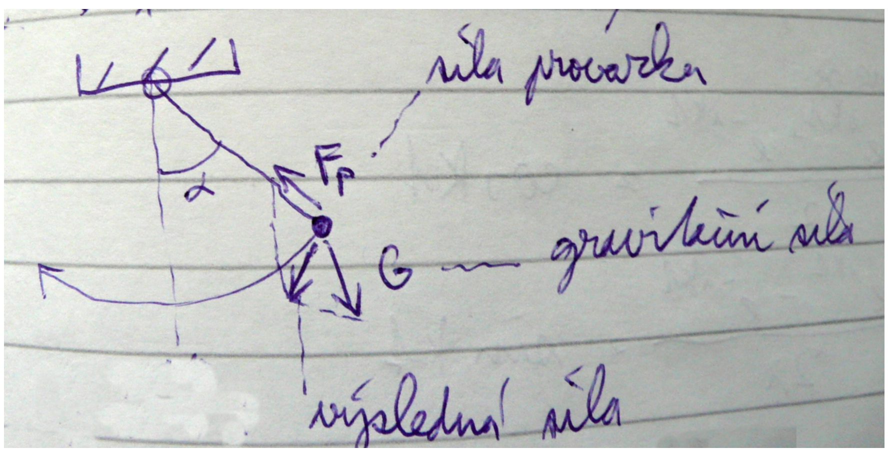
$v = f(h)$
$h' = cv$



Obrázek 1: obr.1

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c.v = c.f(h)$$

<u>Př.:</u>
kyvadlo



Obrázek 2: obr.1

$F = -G.sin\alpha$ .. z obrázku
$F = m.a$ ... (Newton)
$F = m.a = m.s'' = m.l.\alpha''$
,kde l je délka provázku a a$''$ je "zrychlení úhlu"
$\alpha'' = c.sin\alpha \doteq c.\alpha$ ... pro "málo"kmitající kyvadlo; $c < 0$
$\alpha'' = c.\alpha$
Řešení - metoda odhadu
$\alpha = e^{\lambda t}$
$\alpha' = \lambda.e^{\lambda t}$
$\alpha'' = \lambda^2.e^{\lambda t}$
Když $c > 0$:
$e^{\pm\sqrt{c}t}$ je řešení
$\lambda^2 = c$
Když $c < 0$:
$\lambda^2 = c < 0$
$\lambda = \pm ki$
$c = k^2$
$\Rightarrow$ "podezřelé"řešení $e^{\pm kit}$

sečteme je:
$\dfrac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} = cos\,kt$
$\dfrac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} = sin\,kt$
$e^{\pm\sqrt{c}t} \Rightarrow$
$sinh(kt) = \dfrac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}$
$cosh(kt) = \dfrac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}$
,kde $k = \pm\sqrt{c}$
Množina řešení totiž tvoří vektorový prostor..
Jak řešit rovnice typu $\alpha'' = c\alpha$ obecně?
$2\alpha'\alpha'' = 2c\alpha\alpha'$
$(\alpha'^{\,2})' = 2\alpha'\alpha'' = 2c\alpha\alpha' = c(\alpha^2)'$
$\alpha'^{\,2} = c\alpha^2 + K$
$\alpha'' = c\alpha$ ... rovnice pro harmonický oscilátor (typicky)
$\alpha(t) = A.cos(kt) + B.sin(kt) = D.sin(k(t-t_0))$

Př.: (volný pád b)
$v' = 1 - v^2$
Pro nějakou neznámou funkci u:
$v = \dfrac{u'}{u}$
$v' = \dfrac{u''u - u'u'}{u^2} = 1 - (\dfrac{u'}{u})^2$
$u''u = u^2$
$u'' = u \Rightarrow u = cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$
$\Longrightarrow v = \dfrac{(cosh(t)'}{cosh(t)} = \dfrac{sinh(t)}{cosh(t)} = tgh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

Př.: (volný pád a)
$y = y(x)$
$y' + g(x)y = h(x) = Ly$
, kde Ly je lineární operátor
Lineární znamená:
$L(cy) = cLy$
$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$

Speciální případ: $h(x) = 0$ ... homogenní rovnice
$Ly = 0$
Hledáme jádro vektorového prostoru Ly.
$y' = -g(x)y$
$\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -g(x)\mathrm{d}x$
Poč. podm: $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{Y} \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int_{x_0}^{x} g(x)\mathrm{d}x G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{y} = [ln\,y]_{y_0}^{y}$$

$ln\,\dfrac{y}{y_0} = -G(x) \;\Rightarrow\; y = y_0 e^{-G(x)}$

$[ln\, y]_{y_0}^{y} = H(y) - H(y_0$

Pozor, důležitá je poč.podmínka - jinak je y_0 libovolné $y_0 \in R$
Obecný případ: $h(x) \neq 0$
$Ly = h$
-¿ pokud nalezneme jedno řešení y_p ... partikulární řešení
obecné řešení je ve tvaru

$$y_p + y_h$$

, kde y_h je řešení homogenní rovnice
$\Rightarrow \infty$ mnoho řešení
$\Rightarrow$ lze splnit poč.podm.
Potřebujeme ale jedno řešení nalézt..
Trik - variace konstant:
$y = y_0 e^{-G(x)}$
..místo y_0 dáme funkci
$y_p = y_0(x) e^{-G(x)}$
...$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$
$Ly_p = y_p' + g(x)y_p = y_0'(x)e^{-G(x)} + y_0(x)e^{-G(x)}(-G(x))' + g(x)y_0(x)e^{-G(x)}$
Chceme: $y_0'(x)e^{-G(x)} = h(x)$
$\Rightarrow y_0' = h(x)e^{G(x)}$

Jiná metoda na řešení diferenciálních rovnic - práce s mocninnými řadami.

5 Teorie míry a integrálu (29.3.2012)
Zapsal(i): Pavel Veselý a Jan Smyčka

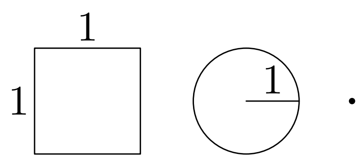
5.1 Míra

Potřebujeme umět měřit množiny. Základními mírami mohou být:

- Počet prvků – pak ovšem platí:
  - $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \omega_0$
  - $|\mathbb{R}| = |(0,1)| = |\mathbb{R}^2| > \omega_0$

  Tato míra tedy není vždy vhodná.

- Délka, obsah, objem:

  Čtverec by měl mít míru 1, kruh π a bod 0.

  Chceme, aby naše míra těmto množinám přiřadila stejnou hodnotu. To však nejde vždy lehce spočíst.

5.2 Požadavky na míru

Rádi bychom, aby míra splňovala tyto vlastnosti:

1. Míra je funkce m z množin do $[0, \infty]$ (ideálně ze všech myslitelných množin),
2. $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$, pokud $E \cap F = \emptyset$ (konečná aditivita),
3. pro $E \subseteq F$ platí: $m(E) \leq m(F)$ (monotonie),
4. pro všechna E, F: $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$ (subaditivita),
5. pro všechna E a všechna $t \in \mathbb{R}$: $m(E+t) = m(E)$, kde $E+t = \{x+t : x \in E\}$ (translační invariance),
6. pro disjunktní $(E_i)_{i \in N}$: $m(\bigcup E_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(E_i)$ (spočetná aditivita).

Příklad. *Problémy, které mohou nastat s mírou:*

1. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ – ekvivalence $\equiv$ na $\mathbb{R}$: $x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. (Podobně se definuje $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ nebo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)$, tedy něco jako modulení 1).

   Z každé třídy ekvivalence $\equiv$ vybereme zástupce z $[0, 1)$, čímž získáme množinu zástupců X. Tento výběr je korektní, neboť například $15,7\overline{3} \equiv 0,7\overline{3}$.

   Vlastnosti množiny X:

   - Je zřejmé, že $X \subseteq [0, 1]$.

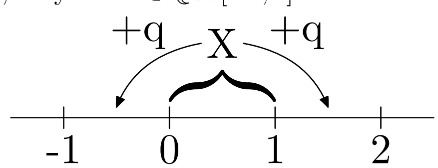
- Přičítáním racionálních čísel k prvkům množiny X získáme všechna reálná čísla:

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(X+q)=\mathbb{R}$$

kde $X+q=\{x+q : x\in X\}$. Důkaz: pro každé $r\in\mathbb{R}$ existuje právě jedno $x\in X : x\equiv r$, z čehož vyplývá, že $r-x=q\in\mathbb{Q}$ a tedy $r=x+q\in X+q$.
- Přičítáním z racionálních čísel jen z intervalu $[-1,1]$ k prvkům X získáme všechna reálná čísla na intervalu $[0,1]$:

$$[0,1]\subseteq\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(X+q)\subseteq[-1,2]$$

První $\subseteq$ vyplývá z toho, že pro $r\in[0,1]$ existuje právě jedno $x\in X$: $r\equiv x$ a $x\in[0,1]$, tedy $r-x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]$.



- Sjednocení je disjunktní, což lze dokázat sporem: nechť $r\in(X+q_1)\cap(X+q_2)$, pak $r=x_1+q_1=x_2+q_2$. Jelikož $q_1\neq q_2$, platí i $x_1\neq x_2$, což je spor s jednoznačností zástupce.

Zajímá nás míra X, značená $m(X)$. Předpokládáme, že X nějakou míru má, a nechť $m(X)\in[0,\infty]$.

Platí, že $X\subseteq[0,1]$, z čehož je přirozené vyvodit, že $m(X)\leq m([0,1])=1$.

Dále je chceme, aby pro X,Y disjunktní platilo:

$$m(X\cup Y)=m(X)+m(Y)$$

Z toho lze matematickou indukcí vyvodit (pro X_i disjunktní):

$$m(\bigcup_{n=1}^{n}X_i)=\sum_{n=1}^{n}m(X_i)$$

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m(X_i)$$

Zvolme $X_i:=X+q_i$, kde $\{q_1,q_2,\dots\}=\mathbb{Q}\cap[-1,1]$.

Označme $SX:=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(X+q)$. Pro míru SX platí:

$$m(SX)=\sum_{i=1}^{\infty}m(X_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m(X)$$

Tato suma je buď 0, pokud $m(X)=0$, nebo ∞, pokud $m(X)>0$.

Platí, že $SX\subseteq[-1,2]$, tedy lze předpokládat, že $m(SX)\leq 3$. Zároveň víme, že $SX\supseteq[0,1]\Rightarrow m(SX)\geq 1$.

Této množině tedy nelze přiřadit míru (s výše uvedenými předpoklady o míře), protože současně má platit: $m(SX)=0$, nebo $m(SX)=\infty$, $m(SX)\leq 3$ a $m(SX)\geq 1$. To je spor s tím, že každé množině lze přiřadit míru.

O míře však předpokládáme elementární věci, např. když do množiny přidáme prvky, tak má větší míru.

Poznámky:

- Předchozí důkaz lze upravit tak, aby nepoužíval nekonečné sjednocení.
- Pozor na to, že ve slově "vybereme" v definici množiny X jsme použili axiom výběru.

2. **Banach-Tarského věta** (používá axiom výběru): Mějme kouli $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Rozdělíme ji na disjunktní množiny $X_1, X_2 \dots X_k$ tak, že $B = X_1 \dot\cup X_2 \dot\cup \cdots \dot\cup X_k$. Množiny X_i přetransformujeme na množiny Y_i takové, že $\bigcup_{i=1}^{k} Y_i = B_1 \dot\cup B_2$, kde $m(B_1) = m(B_2) = m(B)$.

   Jinými slovy: jednu kouli rozdělíme na konečně mnoho disjunktních množin, z nichž pak složíme dvě disjunktní koule – obě však mají stejnou míru jako původní koule.

Máme dva paradoxy. Abychom se jim vyhnuli, vybereme si oslabení požadavků na míru, např. že ne všem množinám lze přiřadit míru. Na druhou stranu, nemůžeme oslabit všechny požadavky, například po vynechání translační invariance by mohla být zavedena tato míra: $m(E) = 0$, pokud E neobsahuje počátek, jinak $m(E) = 1$.

5.3 Elementární množiny, elementární míra

Definice 5.1. *Interval v* $\mathbb{R}$*:* $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$*, kde* $a, b \in \mathbb{R}$*. Velikostí je rozdíl* $|b - a|$.

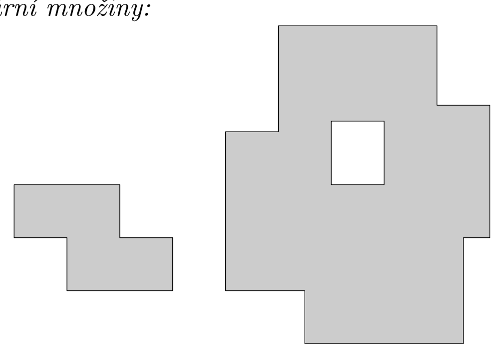
Definice 5.2. *Interval v* $\mathbb{R}^d$ *(kvádr) je součin intervalů v* $\mathbb{R}$*:*

$$B = \prod_{i=1}^{d} I_i \Rightarrow |B| = \prod_{i=1}^{d} |I_i|$$

Definice 5.3. *Elementární množina je konečné sjednocení kvádrů.*

Pozorování: Pokud jsou množiny X, Y elementární, pak jsou rovněž elementární množiny $X \cup Y, X \cap Y, X \backslash Y, X \triangle Y$ (operace $\triangle$ je symetrická diference, tedy něco jako XOR čísel) a pro všechna $t \in \mathbb{R}^d : E + t$ je elementární.

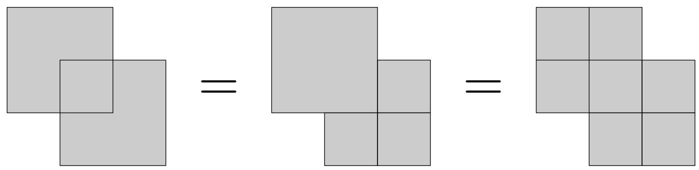
Příklad. *Elementární množiny:*



Lemma. Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^d$ je elementární. Pak:

1. Existují disjunktní kvádry $B_1, B_2, \dots B_k$ takové, že $E = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup \cdots \dot\cup B_k$.
2. $m(E) := \sum_{i=1}^{k} m(B_i)$ a $m(E)$ nezávisí na volbě B_i.

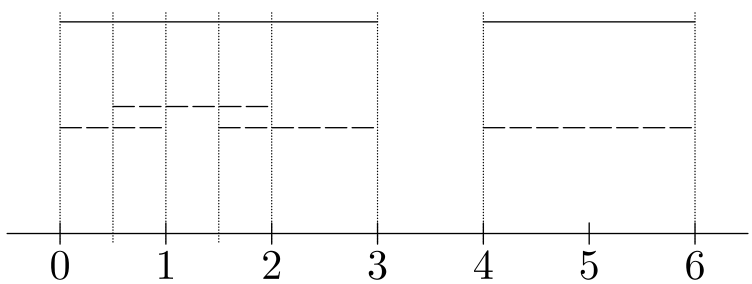
Příklad. *Rozdělení na disjunktní kvádry:*



Důkaz. Jednotlivé části lemma dokážeme odděleně.

1. **První část lemma:**

   Nejprve pro $d = 1$:



Intervaly, z nichž se elementární množina skládá (vyznačeny čárkovaně), stačí nahradit dvěma intervaly.

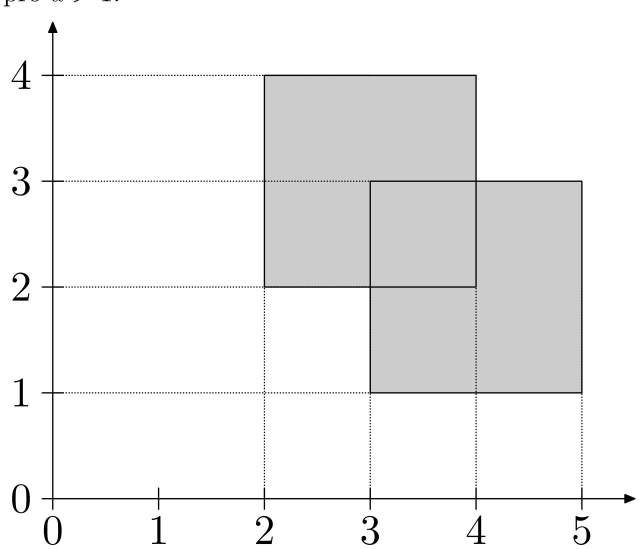
Elementární množina se sestává z intervalů $I_1, \dots I_l$, kde $I_i = (a_i, b_i)$, případně $[a_i, b_i]$, $[a_i, b_i)$ nebo $(a_i, b_i]$.

Množinu konců a začátků intervalů si uspořádejme:

$$\{a_i, b_i : i = 1 \dots l\} = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_h\}$$

Za výsledné intervaly zvolme (x_t, x_{t+1}), případně doplněné ještě o jednobodové intervaly $[x_t, x_t]$.

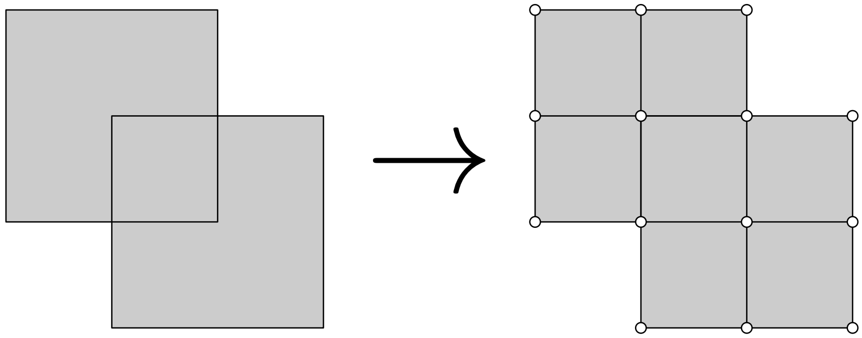
Zobecnění pro $d > 1$:



Elementární množina se sestává z kvádrů $B_1, B_2, \dots B_l$, kde každé $B_i = \prod_{j=1}^{d} I_j^i$.

Pro každé j intervaly $I_j^1 \dots I_j^k$ nakouskuji (podobně jako v dimenzi 1) a získám intervaly $J_j^1 \dots J_j^t$.

Všechny kvádry $J_1^{a_1} \times J_2^{a_2} \times \cdots \times J_d^{a_d}$ jsou disjunktní.

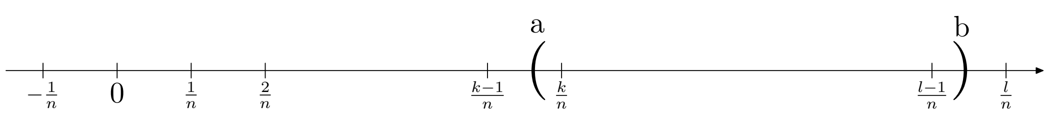


Tím je dokázána část 1.

2. **Druhá část lemma:** Pro interval $I = (a, b)$ zavedeme:

$$m(I) = \lim_{n\to\infty} \frac{|I \ \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})|}{n}$$

kde $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ jsou prvky $\mathbb{Z}$ vynásobené $\frac{1}{n}$.



$$\frac{k-1}{n} < a < \frac{k}{n}$$

$$\frac{l-1}{n} < b < \frac{l}{n}$$

Odečtením získáme:

$$\frac{l-k \ -1}{n} < b - a < \frac{l-k \ +1}{n}$$

Úpravou nerovnice dostaneme:

$$b - a - \frac{1}{n} < \frac{l-k}{n} < b - a + \frac{1}{n}$$

Zajímá nás průnik intervalu I s jednorozměrnou mřížkou $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$:

$$I \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z}) = \{\frac{t}{n} : t \in \{k, k \ +1, \dots l-1\}\}$$

Velikost této množiny tedy je:

$$|I \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})| = l - k$$

Plán: vzorec $m(I) = \lim_{n\to\infty} \frac{|I \ \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})|}{n}$ zobecníme pro více rozměrů a také pro elementární množiny.

Kvádr: $B = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subseteq \mathbb{R}^d$:

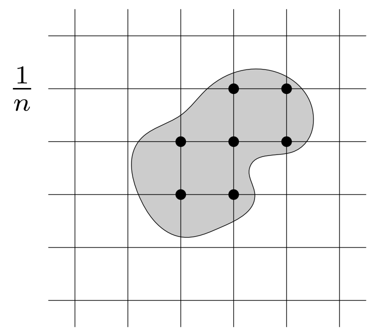
$$m(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z}^d)|}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{d} \frac{|I_i \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})|}{n} =$$

$$= \prod_{i=1}^{d} \lim_{n\to\infty} \frac{|I_i \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})|}{n} = \prod_{i=1}^{d} |I_i|$$

Elementární množina: $E = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup \cdots \dot\cup B_k$:

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{|E \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z}^d)|}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} |B_i \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})|}{n^d} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} \frac{|B_i \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z})|}{n^d} = \sum_{i=1}^{k} m(B_i)$$



Při výpočtu tímto vzorcem v podstatě počítáme body mřížové sítě uvnitř množiny.

$\square$

Úkoly do příště:

- Najít množinu E takovou, že $m(E)$ není definováno.
- Najít množinu E takovou, že $m(E)$ není translačně invariantní.

6 Jordanova miera (5.4.2012) *Zapsal(i): Tobiáš Hudec*

6.1 Riešenia hádaniek

Příklad. *Nájdite množinu $E \subseteq \mathbb{R}$ takú že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|E\cap\frac{1}{n}\mathbb{Z}|}{n^d}$ nie je translačne invariantná.*

Řešení. Definujme $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]^d$. Potom

$$|E \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}| = (n+1)^d$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E\cap\frac{1}{n}\mathbb{Z}|}{n^d} = 1$$

$$|E + (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots \sqrt{2}) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E + (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots \sqrt{2}) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}|}{n^d} = 0$$

Příklad. *Nájdite množinu $E \subseteq \mathbb{R}$ takú že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|E\cap\frac{1}{n}\mathbb{Z}|}{n^d}$ nie je definovaná.*

Řešení. Pre p prvočíslo definujme

$$A_p = \left\{\frac{0}{p}, \frac{1}{p}, \dots \frac{p-1}{p}\right\}^d \setminus (0,0,\dots 0)$$

$$E = A_2 \cup A_5 \cup A_{11} \cup \dots$$

Potom platí

$$\frac{|E\cap\frac{1}{n}\mathbb{Z}|}{n^d} = \begin{cases} \frac{n^d-1}{n^d} & \text{pre } n = 2, 5, 11, \dots \\ 0 & \text{pre } n = 3, 7, 13, \dots \end{cases}$$

Takže limita nemôže existovať.

6.2 Definícia Jordanovej miery

Od minula máme definovanú elementárnu mieru na elementárnych množinách, pre ktorú platí

$$m(B) = vol(B) \text{ pre } B \text{ kváder}$$

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F) \text{ kde } E \cap F = \emptyset \text{ a } E,\ F \text{ sú elementárne množiny}$$

$$m(E + t) = m(E) \text{ kde } E \text{ je elementárna a } t \in \mathbb{R}^n$$

Poznámka. *Takéto m je určené jednoznačne.*

Chceme m rozšíriť na širší systém množín tak, aby zostali zachované uvedené vlastnosti.

Definice. *Nech $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E obmedzené. Definujeme vnútornú Jordanovu mieru ako*

$$m_{*,J}(E) = \sup_{\substack{A \subseteq E \\ A \text{ je elementárna}}} m(A)$$

a vonkajšiu Jordanovu mieru ako

$$m^{*,J}(E) = \inf_{\substack{E \subseteq B \\ B \text{ je elementárna}}} m(B)$$

Ak $m_{*,J}(E) = m^{*,J}(E)$, *potom povieme, že množina* E *je (Jordanovsky) meratelná a definujeme Jordanovu mieru* $m(E) = m_{*,J}(E)$.

Příklad. *Spočítame mieru trojuholníka* T *s vrcholmi* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. *Nájdime elementárne množiny* A_n *a* B_n, *ktoré aproximujú trojuholník z vnútra z vonka.* A_n *definujeme ako množinu pod grafom funkcie* $\frac{\lfloor n\cdot x\rfloor}{n}$ *a* B_n *definujeme ako množinu pod grafom funkcie* $\frac{\lceil n\cdot x\rceil}{n}$. *Potom platí:*

$$m(A_n) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$$

$$\sup m(A_n) = \frac{1}{2}$$

Podobným spôsobom ukážeme, že $\inf B_n = \frac{1}{2}$. *Keďže* $\forall A, B$ *elementárne t.ž.* $A \subseteq T \subseteq B$ *platí* $m(A) \leq m(B)$, *potom už nutne* $m_{*,J}(T) = m^{*,J}(T) = \frac{1}{2}$.

Věta 6.1. *Nech* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *je obmedzená množina. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

1. E *je Jordanovsky meratelná.*
2. $\forall\varepsilon\ \exists$ *elementárne* A, B *t.ž.* $A \subseteq E \subseteq B$ *a* $m(B\backslash A) < \varepsilon$
3. $\forall\varepsilon\ \exists$ *elementárna* A *t.ž.* $m^{*,J}(E \triangle A) < \varepsilon$

Důkaz. $1 \Rightarrow 2$ Označme $x = \sup_{A\subseteq E} m(A) = \inf_{E\subseteq B} m(B)$. Potom existuje $A \subseteq E$ elementárna t.ž. $m(A) > x - \frac{\varepsilon}{2}$ a existuje $B \supseteq E$ elementárna t.ž. $m(B) < x + \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $m(B\backslash A) = m(B) - m(A) < \varepsilon$.

$2 \Rightarrow 3$ Majme A, B spĺňajúce 2. Potom $E \triangle A = E\backslash A \subseteq B\backslash A$ a platí $m(B\backslash A) < \varepsilon$, teda $m^{*,J}(E \triangle A) < \varepsilon$.

$3 \Rightarrow 1$ Cvičenie.

□

Pre E elementárnu platí, že E je Jordanovsky meratelná, pričom Jordanova miera elementárnej množiny sa zhoduje s elementárnou mierou. Stačí si uvedomiť, že $\forall B$ elementárna, $B \supseteq E$ platí $m(B) \geq m(E)$, teda $m^*(E) \geq m(E)$. Opačná nerovnosť plynie z definície infima. Analogicky sa ukáže $m_*(E) = m(E)$.
Takisto platí $m(\emptyset) = 0$. Prázdna množina je totiž elementárna.

Věta 6.2. *Nech* E, F *sú meratelné. Potom platí:*

1. $E \cap F, E \cup F, E\backslash F, E \triangle F$ *sú meratelné.*
2. $m(E) \geq 0$
3. $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ *ak* $E \cap F = \emptyset$
4. $E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$
5. $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$
6. $m(E + t) = m(E)$ *kde* $t \in \mathbb{R}$

Důkaz. 1 Podľa predchádzajúcej vety máme E', F' t.ž. $m(E \triangle E') < \varepsilon$ a $m(F \triangle F') < \varepsilon$. Platí $(E \cup F) \triangle (E' \cup F') \subseteq (E \triangle E') \cup (F \triangle F')$. Teda $m((E \cup F) \triangle (E' \cup F')) < 2\varepsilon$ a $E \cup F$ je meratelná. Podobne sa ukáže prienik, rozdiel a symetrický rozdiel.

3 Majme $A \subseteq E \subseteq B$, A, B elementárne, $C \subseteq F \subseteq D$, C, D elementárne. Potom platí

$$A \cup C \subseteq E \cup F \subseteq B \cup D$$

$$m(A \cup C) = m(A) + m(C)$$

$$m_*(E) + m_*(F) = \sup m(A) + m(C) \leq m_*(E \cup F)$$

$$m(B \cup D) \leq m(B) + m(D)$$

$$m^*(E \cup F) \leq m^*(E) + m^*(F)$$

Máme teda $m_*(E) + m_*(F) \leq m_*(E \cup F) \leq m^*(E \cup F) \leq m^*(E) + m^*(F)$. Keďže $m_*(E) = m^*(E)$ a $m_*(F) = m^*(F)$, v predchádzajúcich nerovniciach nastáva rovnosť a máme $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$

4 $E \cup (F \backslash E) = F$, teda $m(E) + m(F \backslash E) = m(F)$, z čoho plynie, že $m(E) \leq m(F)$.

5 $m(E) + m(F) = m(E \cup F) + m(E \cap F)$

$\square$

Poznámka. *Nech B je kompaktný kváder a $f : B \to R$ je spojitá funkcia. Potom graf funkcie $\{(x, f(x)) | x \in B\}$ je Jordanovsky meratelná množina a má nulovú mieru.*

6.3 Hádanky

1. Kompaktný konvexný mnohosten je Jordanovsky meratelný.

2. Guľa je Jordanovsky meratelná, pričom

$$m(B(0,r)) = c_d \cdot r^d$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{d}}\right)^d \leq c_d \leq 2^d$$

3. Spočítajte $m(X)$ pre $X = [0,1]^2 \cap Q^2$ a $X = [0,1]^2 \backslash Q^2$.

7 Pokračovanie Jordanovej miery (12.4.2012) *Zapsal(i): Jozef Gandžala & Juraj Citorík*

7.1 Riešenie hádaniek z minula

7.1.1 Prvá hádanka

Zadanie: Ukážte, že Jordanova miera gule so stredom v 0 a polomerom r je

$$m_d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,r)\right) = c_d \cdot r^d \tag{1}$$

kde c_d je konštanta, pre ktorú platí

$$\left(\frac{2}{\sqrt{d}}\right)^d \leq c_d \leq 2^d \tag{2}$$

Riešenie:

Existencia miery: Guľu môžeme rozdeliť na dve rovnaké časti, pričom každá z nich tvorí plochu pod (d-dimenzionálnou) krivkou $\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_d^2)}$. Z minula ale vieme, že každá plocha pod spojitou funkciou na kompakte je Jordanovsky merateľná.

Odhad c_d: Predpokladajme, že naozaj platí (1). Potom odhad (2) dostaneme jednoducho tak, že danej guli opíšeme a vpíšeme d-dimenzionálnu kocku.

Hodnota miery: Nakoniec nahliadneme prečo rovnosť (1) platí. Predstavme si guľu s polomerom 1 a to ako jej zväčšovanie a zmenšovanie o r ovplyvní mieru. Je celkom intuitívne, že by malo platiť

$$m_d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,r)\right) \stackrel{?}{=} \underbrace{m_d\left(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\right)}_{c_d} \cdot r^d$$

O tom, že tomu tak naozaj je sa presvedčíme z definície miery a kvádra.

$$\begin{aligned} m(rE) = m^*(rE) &= \inf_{\substack{B\supseteq rE \\ B \text{ } element.}} \{m(B)\} = \inf_{\substack{\frac{1}{r}B'\supseteq E \\ B' \text{ } element.}} \{m(B')\} \\ &= r^d \cdot \inf_{\substack{B'\supseteq E \\ B' \text{ } element.}} \{m(B')\} = r^d \cdot m(E) \end{aligned}$$

Poznámka. *Presný výpočet c_d už tak triviálny nie je.*

7.1.2 Druhá hádanka

Zadanie: Nájdite $m(X)$ pre $X = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ resp. pre $X = [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.

Riešenie: Riešme najprv úlohu pre $X = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$. Z definície Jordanovej miery vieme, že musí platiť $m(X) = m^*(X) = m_*(X)$.

$$m^*(X) = \inf_{\substack{B\supseteq E \\ B \text{ } element.}} \{m(B)\} = 1$$

(sporom: keby $m^*(X) < 1$, tak by existoval v $[0,1]^2$ nepokrytý štvorec a z vety o hustote $\mathbb{R}$ vieme, že taký štvorec by obsahoval aspoň jedno $q \in \mathbb{Q}$)

$$m_*(X) = \sup_{\substack{B\subseteq E \\ B \text{ } element.}} \{m(B)\} = 0$$

(obdobne ako pri $m^*(X)$)

Dostali sme teda, že vnútorná a vonkajšia Jordanova miera sa nerovná, a teda množina $X = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ nie je Jordanovsky merateľná.
Podobnou úvahou overíme, že ani $X = [0,1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ nie je Jordanovsky merateľná.

7.2 Pokračovanie Jordanovej miery

Věta 7.1. *Nech $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineárne zobrazenie, $E \subseteq \mathbb{R}^d$, E je Jordanovsky merateľná. Potom $m(L[E]) = K \cdot m(E)$, kde $K = |\det(A_L)|$*

Důkaz. (kostra) Pre $|\det(A_L)| = 0$ je $K = 0$, lebo L zníži počet rozmerov E. Ďalej preto uvažujeme $|\det(A_L)| \neq 0$. (L značí lineárne zobrazenie a A_L maticu tohoto zobrazenia.)

1. E je kváder
   (a) $E = E_0 = [0,1]^d$ ... platí, stačí ak si spomenieme, že $\det(A_L)$ je objem obrazu $[0,1]^d$ určený stĺpcovými vektormi matice A_L (Dk: lineárna algebra)
   (b) $E = M \cdot E_0$ ... vieme, že $m(E) = |\det(M)| \cdot m(E_0)$ a teda $m(LE) = m(LME_0) = |\det(LM)| \cdot m(E_0) = |\det(A_L)| \cdot m(E)$
2. E je elementárna množina
   $\exists (B_k)$ disjunktné kvádre t.ž. $E = \bigcup B_k$. Platí $LE = \bigcup LB_k$
   $m(LE) = \sum m(LB_k) \overset{(1.)}{=} \sum |\det(A_L)| \cdot m(B_k) = |\det(A_L)| \cdot \sum m(B_k)$
   $= |\det(A_L)| \cdot m(E)$
3. E je Jordanovsky merateľná
   $\det(A_L) \neq 0 \Rightarrow \exists L^{-1}$

$$\begin{aligned} m^*(LE) &= \inf_{\substack{B \supseteq LE \\ B\ element.}} \{m(B)\} = \inf_{\substack{L^{-1}B \supseteq E \\ B\ element.}} \{m(L\overbrace{L^{-1}B}^{B'})\} \\ &\overset{(2.)}{=} \inf_{B' \supseteq E} \{|\det(A_L)| \cdot m(B')\} \\ &= |\det(A_L)| \cdot \inf_{B' \supseteq E} \{m(B')\} = |\det(A_L)| \cdot m^*(E) \end{aligned}$$

Analogicky pre $m_*(E)$. □

Pre obecné $E \subset \mathbb{R}^d$:
$m^*(E) = m^*(\bar{E})$, kde $\bar{E}$ je uzáver E, t.j. najmenšia uzavretá $F \supseteq E$
$m_*(E) = m_*(\mathrm{nt}(E))$, kde $\mathrm{nt}(E)$ je uzáver E, t.j. najväčšia otvorená $G \subseteq E$

Definice 7.2. *Funkcia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je po častiach konštantná (pčk) ak existuje delenie (x_n) intervalu $[a,b]$ t.ž. $f(y) = c_i\ \forall y \in (x_i, x_{i+1})$.*

Definice 7.3. *(Integrál z po častiach konštantnej funkcie)*

$$\text{(pčk)} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} c_i |x_{i+1} - x_i| \tag{3}$$

Pre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ obmedzené platí

$$\text{(R)}\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\substack{g:[a,b]\to\mathbb{R}\\ g\le f\\ g je (\text{pčk})}} (\text{pčk})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Pre $E = \{(x, y) : 0 \le y \le f(x), x \in [a, b]\}$ je

$$m^*(E) = \text{(R)}\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

7.3 Lebesgueova miera

Opakovanie (Jordanova vonkajšia miera):

$$m^{*,J}(E) = \inf_{\substack{B\supseteq E\\ B\ element.}} m(B) = \inf_{\substack{B\supseteq E\\ B\ element.}} \sum_{i=1}^{n} |B_i|, \quad B = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup \dots \dot\cup B_n, \quad B_i \text{ kváder}$$

Definice 7.4 (Lebesgueova vonkajšia miera)**.** *Nech $E \subset \mathbb{R}^d$. Potom vonkajšia Lebesgueova miera E je*

$$m^*(E) = \inf_{\substack{B_1,B_2,\dots\\ \dot\bigcup B_i\supseteq E\\ \#B_i\ je\ spočetne}} \sum_{i=1}^{\infty} |B_i|$$

Definice 7.5 (Lebesgueovská merateľnosť)**.** *$E \subseteq \mathbb{R}^d$ je Lebesgueovsky merateľná práve vtedy, keď $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists G \supseteq E)$ (G otvorená) $(m^*(G \setminus E) < \varepsilon)$*
Lebesgueovu mieru potom značíme $m(E) = m^*(E)$.

Příklad. *Uvažujme $E = [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$. Aká je Lebesgueova miera E?*
E môžeme zapísať ako množinu spočetne veľa bodov: $E = \{q_1, q_2, \dots\}$. Každý z nich pokryjeme otvoreným intervalom $B_i = (q_i^1 - \varepsilon_i, q_i^1 + \varepsilon_i) \times (q_i^2 - \varepsilon_i, q_i^2 + \varepsilon_i)$, pričom ε volíme tak, aby

$$\sum_{i=1}^{\infty} |B_i| < \varepsilon \quad \left(napr.\ |B_i| = (2\varepsilon_i)^2 := \frac{\varepsilon}{4^i + 1}.\right)$$

Množina E teda síce nie je Jordanovsky merateľná, avšak je Lebesgueovsky merateľná a jej miera je $m(E) = 0$.

7.4 Ďalšie hádanky

1. Nájdite $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, resp. $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ t.ž. nie sú Jordanovsky merateľné ani vtedy, keď $\forall E_i$ je Jordanovsky merateľná a $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ je obmedzená.
2. Ukážte, že $\exists f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.ž. $(f_n \in R[a, b])\,(f_n \to f \text{ (bodovo)})\,(f \notin R[a, b])$.

8 Vnější a Lebesgueova míra (19.4.2012) *Zapsal(i): Kateřina Boková & Jana Rapavá*

8.1 Řešení hádanek:

Příklad. $E_1, E_2, \cdots$ *Jordanovsky měřitelné množiny* $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ *nemusí být Jordanovsky měřitelné množiny?*

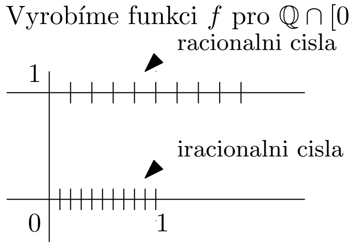
Řešení. sjednocení: $|E_i| = 1$
$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ není Jordanovsky měřitelné, ale dá se napsat jako sjednocení spočetně mnoho jednobodových množin.

Příklad. $f_1, f_2, \dots \in R([0,1])$ *funkce a* $f = \lim_{n\to\infty} f_n, f \notin R([0,1])$

Řešení. Charakteristická funkce:

$$f = \chi_{\cup E_n} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in \bigcup E_n \\ 0 & x \notin \bigcup E_n \end{array} \right\}$$

Vyrobíme funkci f pro $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, je tato funkce Riemanovsky integrovatelná?



Bez ohledu na jemnost dělení je na každém intervalu supremum funkce rovno 1 a infimum rovno 0.
$\forall D : S(f,D) = 1 \wedge s(f,D) = 0$
Posloupnost funkcí konvergujících k f je $\{f_i = \chi_{\bigcup_{n=1}^{i} E_n}\}, f_i \in R([0,1])$

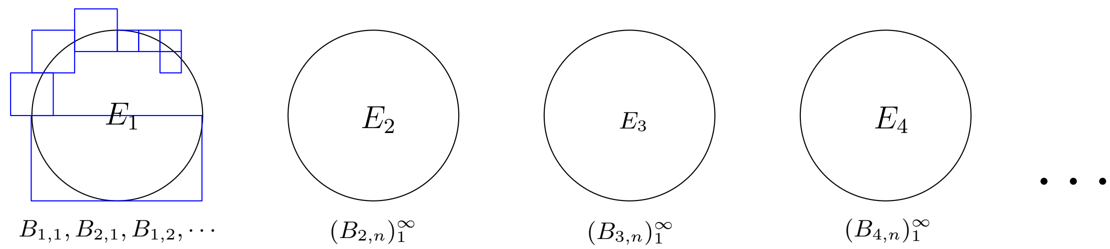
8.2 Vnější míra

Definice 8.1. $m^*(E) = \inf_{B_1,B_2,\cdots boxy, \bigcup B_n \supseteq E} \sum |B_n|$

Věta 8.2. m^* *má následující tři vlastnosti:*

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. $E \subseteq F \Rightarrow m^*(E) \subseteq m^*(F)$
3. $m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum m^*(E_n)$

Důkaz. 1. triviální (obdelník se libovolně zmenšuje)
2. každé pokrytí F je zároveň pokrytím E:
   (a) $\bigcup B_n \supseteq F \Rightarrow \bigcup B_n \supseteq E$
   (b) $\forall (B_1, B_2, \cdots)$ infimum pro $m^*(F)$ se uvažuje pro $m^*(E)$
   (c) $S \subseteq T \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \inf S \geq \inf T$
   (d) $S = \{\sum |B_n| : \bigcup B_n \supseteq F\}$
   $T = \{\sum |B_n| : \bigcup B_n \supseteq E\}$
3. najdeme pokrytí $B_1, B_2, \cdots$ velikosti $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$
   trik - stačí: $(\forall \varepsilon > 0) m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon$
   zkusíme najít $(B_n)_1^{\infty} : \bigcup B_n \supseteq E \wedge \sum |B_n| \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_n)$



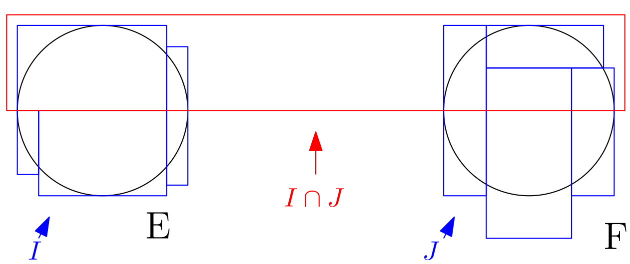
$\bigcup B_{1,i} \supseteq E_1$
$\sum |B_{1,i}| \leq m^*(E_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ (existuje z definice m^*)
$\sum_{n=1}^{\infty} |B_{k,i}| \leq m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$
$\{B_n\} = \{B_{n,k}\}$ (v libovolním pořadí)
$\sum |B_n| = \sum_k \sum_n |B_{k,n}|$ (můžem přehodit sumy, protože všechny členy jsou kladný)
$\leq \sum m^*(E_k) + \varepsilon$

□

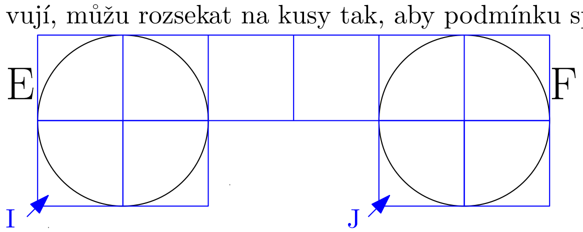
(Bez důkazu.) Z 3 a 1 plyne konečná varianta 3.

Věta 8.3. *(Lemma)* $m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$, *pokud* $\inf_{e \in E, f \in F} d_2(e, f) = dist(E, F) > 0$
$(\to E \cap F = \emptyset)$

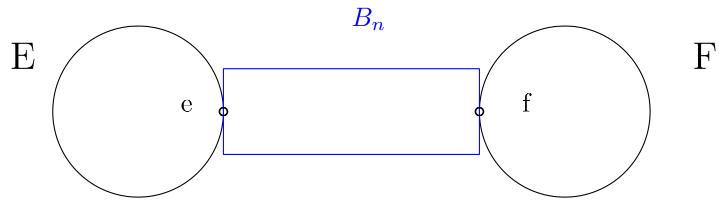
Důkaz. $\leq$ plyne z předchozího tvrzení
Chceme: $m^*(E) + m^*(F) \leq m^*(E \cup F)$



Co by se stalo, kdyby jedna množina pokrývala E i F současne?
$\varepsilon > 0, B_1, B_2, \cdots$
$\bigcup B_n \supseteq E \cup F \wedge \sum |B_n| \leq m^*(E \cup F) + \varepsilon$
$I = \{n : B_n \cap E \neq \emptyset\}$
$J = \{n : B_n \cap F \neq \emptyset\}$
$\bigcup_{n \in I} B_n \supseteq E, m^*(E) \leq \sum_{n \in I} |B_n|$
$\bigcup_{n \in J} B_n \supseteq F, m^*(F) \leq \sum_{n \in J} |B_n|$
Kdyby $I \cap J = \emptyset$, pak $m^*(E) + m^*(F) \leq \sum_n |B_n| \leq m^*(E, F) + \varepsilon$
Co když $I \cap J \neq \emptyset$?
Můžu požadovat, aby $(\forall n) diam(B_n) \leq t$, kde $t \in \mathbb{R}^+$ (členy pokrytí, které nevyhovují, můžu rozsekat na kusy tak, aby podmínku splňovali)



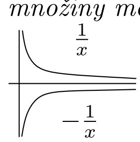
Nechť $t = \frac{dist(E,F)}{2}$ (tuto podmínku přidám na začátek důkazu)



$dist(E,F) \leq d(e,f) \leq diam(B_n) \leq t$ □

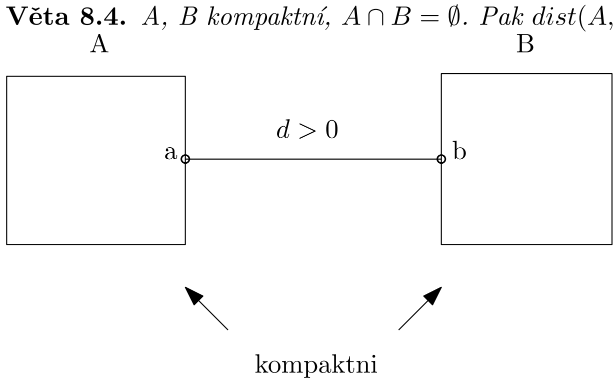
Příklad. *Disjunktné množiny s nulovou vzdáleností:*

1. *E = [0, 1] F = (1, 2)*
2. *množiny mohou být i uzavřené*



3. $dist([0;0,99],[1,01;2]) > 0 \Rightarrow$ *zkusíme z vnitřku aproximovat kompaktní množinou.*

Věta 8.4. *A, B kompaktní,* $A \cap B = \emptyset$*. Pak* $dist(A,B) > 0$.



Důkaz. $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = dist(x,B)$
f je spojitá $\Rightarrow$ má minimum $a \notin B$
$g : B \to \mathbb{R}, g(y) = dist(a,y)$
g je spojitá $\Rightarrow$ má minimum $b \notin A$ □

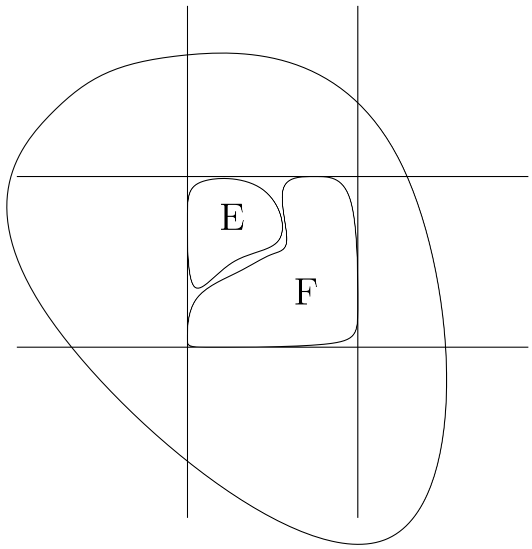
8.3 Lebesgueova míra

Definice. *(z minula)* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *je Lebesgueovsky měřitelná právě tehdy, když* $(\forall \varepsilon > 0)$
$(\exists$ *otevřená* $U(\varepsilon) \supseteq E) : m^*(U \setminus E) < \varepsilon$
$(\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ \exists F \subseteq E$ *(F uzavřená) taková, že* $m^*(E \setminus F) < \varepsilon)$
Pro Lebesgueovsky měřitelné množiny platí $m(E) = m^*(E)$

Věta 8.5. *Nechť* $E_1, E_2, \cdots$ *jsou Lebesgueovsky měřitelné a po dvou disjunktní. Pak* $m(\bigcup_n E_n) = \sum_n m(E_n)$

Důkaz. $\leq OK$
Pro $\geq$ postupuji podobně jako v Lemma:

- když je vzdálenost nulová, aplikuju Lemma
- pokud není, rozsekám a všimnu si, že E_n jsou měřitelné
- E i F trošku zmenším, dokážu nimi pokrýt původnou množinu až na ε, a protože jsou teď kompaktní a disjunktní, mají nenulovou vzdálenost



□

Příklad. *(Příklady Lebesgueovsky měřitelných množin)*

- *Všechny otevřené množiny jsou Lebesgueovsky měřitelné. (z definice)*
- *Všechny uzavřené množiny jsou Lebesgueovsky měřitelné. (z definice a přechodem k doplňku)*
- *Všechny množiny, pro které platí $m^*(E) = 0$, jsou Lebesgueovsky měřitelné.*

Definice 8.6. *$\sigma -$ algebra je systém množin $\mathbb{S}$, pro který platí:*

- $\emptyset \in \mathbb{S}$
- $A \in \mathbb{S} \Rightarrow \bar{A} \in \mathbb{S}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{S} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathbb{S}, \bigcap A_n \in \mathbb{S}$

Věta 8.7. *Lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří $\sigma -$ algebru:*

- *$\emptyset$ je Lebesgueovsky měřitelná.*
- *E je Lebesgueovsky měřitelná $\Rightarrow \mathbb{R}^d \setminus E$ je Lebesgueovsky měřitelná. (z toho plyne ekvivalence definic)*
- *$E_1, E_2, \cdots$ Lebesgueovsky měřitelné $\Rightarrow \bigcup_n E_n, \bigcap_n E_n$ jsou Lebesgueovsky měřitelné.*

Pokud přidáme průnik, sjednocení a doplněk, dostaneme Booleovu algebru.

Definice 8.8. *Systém otevřených množin, který je $\sigma -$ algebrou, se nazýva borelovské množiny.*

Věta 8.9. *Lebesgueovsky měřitelné množiny tvoří právě borelovské množiny a nulové množiny.*

9 Lebesgueův integrál (3.5.2012)
Zapsal(i): Karel Král & Tomáš „Palec“ Maleček

9.1 Opakování vlastností Lebesgueovy míry

- Lebesgueova míra množiny E je značena $m(E)$ a je definována, pokud je E Lebesgueovsky měřitelná. Množina je Lebesgueovsky měřitelná podle definice právě tehdy, když se dá obalit do jiné otevřené množiny G, tedy $\exists G : E \subseteq G$ a G je otevřená a $\forall \varepsilon : m(E \setminus G) < \varepsilon$ (spočetné sjednocení kvádrů).
- $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ kde $E \cap F = \emptyset$
- $m(\emptyset) = 0$
- $m(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$, pokud $\forall i \neq j : E_i \cap E_j = \emptyset$. Míra spočetného sjednocení je součet měr.
- $m(E + x) = m(E)$ míra množiny posunuté o vektor $x \in \mathbb{R}^d$ se nezmění.
- $m(TE) = |\det(T)|\, m(E)$ kde T je lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.
- Všechny otevřené i všechny uzavřené množiny jsou Lebesgueovsky měřitelné.

9.2 Integrování za pomoci míry

Nyní využijeme Lebesgueovu míru, abychom definovali Lebesgueův integrál, který bude v jistém smyslu obecnější než integrál Riemannův.

- Funkce $1_E(x)$ je charakteristická funkce měřitelné množiny E. Tedy $1_E(x)$ je rovna jedné pro $x \in E$ a nule jinak.

  Pak definujeme $\int_{\mathbb{R}^d} 1_E dm = m(E)$.
- Funkci $f = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{E_i}$ se říká jednoduchá, pokud jsou E_i měřitelné ne nutně disjunktní množiny a $c_i \in \mathbb{R}$. Pak $\int_{\mathbb{R}^d} f = \sum_{i=1}^{n} c_i m(E_i)$. Pro nedisjunktní množiny E_i si můžeme představit, že je napřed rozdělíme na konečně mnoho disjunktních množin.
- Funkci f nazveme funkcí měřitelnou když $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ množina $\{x | f(x) < \lambda\}$ je měřitelná množina.

  Integrál z měřitelné funkce $f \geq 0$ je $\int_{\mathbb{R}^d} f dm = \sup\{\int_{\mathbb{R}^d} g dm | g$ jednoduchá funkce $\& 0 \leq g \leq f\}$.

  Příklad. *$f(x) = 15$ pro $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $f(x) = 17$ pro $x \notin \mathbb{Q}, x \in [0,1]$ a $f(x) = 0$ jinak. Integrál této funkce $\int_{\mathbb{R}} f(x) dm(x) = 17$.*
- f je měřitelná. Nazvěme $f^+ := \max\{0, f\}$, $f^- := \max\{0, -f\}$. Pak integrál f je dán $\int_{\mathbb{R}^d} f = \int f^+ - \int f^-$.

Podívejme se nyní na vlastnosti právě definovaného integrálu. Má všechny vlastnosti, na které jsme byli zvyklí u Riemannova integrálu. $\int f + g = \int f + \int g$, $\int cf = c \int f$ pro $c \in \mathbb{R}$ a pokud obě strany existují.
Integrál je invariantní k posunutí $\int f(x + c) = \int f(x)$, což plyne z invariantnosti míry vůči posunutí.
Obecněji pak $\int f(Tx) = \frac{1}{|\det(T)|} \int f(x)$, kde $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je lineární zobrazenmí.
Ještě obecněji pak $\int f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dm = \int f(x)$ kde $J_\varphi(x)$ je Jakobián, tedy absolutní hodnota determinantu matice parciálních derivací $J_\varphi(x) = \left| \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \right|$. Kde $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ a jsou splněny nějaké předpoklady.

Pokud f je Riemannovsky integrovatelná, $f(x) = 0$ mimo $[a, b]$ pak se oba integrály rovnají $\int_{\mathbb{R}} f(x)dm(x) = (R)\int_a^b f(x)dx$.

9.3 Zobecnění integrálu

Pokusme se nyní zobecnit definiční obory funkcí, které umíme zintegrovat.
Definujme měřitelný prostor jako trojici $(X, \mathcal{B}, m)$ kde X je množina bodů. $\mathcal{B}$ je σ-algebra všech měřitelných množin. Pro σ-algebru musí platit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{B} \to X \setminus A \in \mathcal{B}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B} \to \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$. m je míra, tedy $m(\emptyset) = 0$, $m(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$. Další vlastnosti, které platili pro Lebesgueovu míru nemusí platit, neboť nemusíme mít na X definovaný posun.

Příklad. *Triviální míra $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$.*

Příklad. *$\mathcal{B} = 2^X = \mathcal{P}(X)$ nemusí existovat, jak jsme si už ukázali na příkladu $X = \mathbb{R}$. Pro spočetná X lze tuto míru dobře definovat. $p : X \to [0, \infty]$ $m(E) = \sum_{x\in E} p(x)$ se nazývá diskrétní σ-algebra.*

Příklad. *Pokud $\mathcal{B}$ jsou Lebesgueovsky měřitelné množiny dostáváme Lebesgueovu míru.*

Můžeme si všimnout, že předchozí definice integrálu funguje i na měřitelných prostorech.

Věta 9.1. *Markovova nerovnost*
Nechť $f : X \to [0, 1]$ je měřitelná funkce z měřitelného prostoru X. Nechť $\lambda \in (0, \infty)$ a $E = \{x \in X : f(x) \geq \lambda\}$. Pak $m(E) \leq \frac{1}{\lambda}\int_X f(x)dm(x)$.

Důkaz. Ověřme jednotlivé podmínky potřebné aby integrál byl dobře definován.

- E je měřitelná množina. Z definice měřitelné funkce f vyplývá, že doplněk E je měřitelná množina. Z definice míry pak vyplývá, že E je měřitelná.
- $0 \leq g = \lambda{\cdot}1_E \leq f$ protože f je nezáporná na E (pro $x \in E$ platí $f(x) \geq \lambda > 0$).

Integrál je dobře definovaný $\int f = \sup\{\int_{\mathbb{R}^d} gdm : g$ jednoduchá funkce $\&0 \leq g \leq f\}$ mezi takové patří i naše g. Tedy platí $\int f \geq \int_{\mathbb{R}^d} g = \lambda \cdot m(E)$.

□

Jaké vlastnosti má takovýto integrál?

- $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ pokud $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, f_n je monotonní konvergence a zároveň dominovaná konvergence, tedy $\exists g \geq 0$ takové že $\int g < \infty$ a zároveň $\forall n : |f_n| \leq g$ skoro všude.

  Kde skoro všude znamená že nějaká vlastnost $P(x)$ prvku $x \in X$ platí m-skoro všude pokud množina výjimek má míru 0 tedy $m(\{x \in X : \neg P(x)\}) = 0$.
- Platí také Fubiniho věta $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ pak $\int_{X\times Y} f(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) = \int_Y \int_X f(x, y)$. Pokud je f měřitelná.

  Míru na X a Y máme, pak míra na $X \times Y$ se definuje jako součin měr.

Umíme tedy integrovat funkce na skoro libovolné množině. K čemu nám to je dobré? Dá se takto vybudovat například teorie pravděpodobnosti.

9.4 Teorie pravděpodobnosti

Definice. *Pravděpodobnostní prostor je trojice* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Kde* Ω *je množina elementárních jevů (například možných čísel po hodu kostkou).* $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ *je množina jevů které rozlišujeme (padlo sudé nebo liché číslo), navíc je to* σ*-algebra. Pravděpodobnost* $P : \mathcal{F} \to [0,1]$*, přičemž* $P(\Omega) = 1$*.*

Příklad. $X = [0,1]$ *spolu s Lebesgueovou mírou dává pravděpodobnost, že náhodný bod padne do námi zvolené měřitelné množiny.*

Příklad. $X = \mathbb{R}^d$ *a* $f : X \to \mathbb{R}$*, pak* $P[E] = \int_E f dm = \int_X f \cdot 1_E dm(x)$*. Funkci* f *nazýváme hustotou pravděpodobnosti.*

Místo „skoro všude“ se v teorii pravděpodobnosti říká „skoro jistě“.

Definice. *Nechť* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *je měřitelná funkce, pak ji nazveme náhodnou veličinou. Střední hodnotou náhodné veličiny* X *pak rozumíme* $EX = \int_\Omega f(\omega) dP(\omega)$*. Když je* $X \geq 0$ *pak* $EX = \int_0^\infty P[X \geq \lambda] d\lambda$*, což se dokáže za pomoci Fubiniho věty.*

K zamyšlení: Důkaz předchozí věty.
K zamyšlení: Jde definovat translačně invariantní náhodné celé (reálné) číslo? Tedy takové že když množinu posunu pravděpodobnost jejího vybrání zůstane stejná?

Věta 9.2. *Markovova nerovnost v teorii pravděpodobnosti* $X : \Omega \to [0, \infty]$ *náhodná veličina. Pak* $P[X \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda} EX$*.*

10 Funkcionální analýza – úvod (10.5.2012) *Zapsal(i): Vojta Tůma & Tomáš Jakl*

10.1 Úvod a počáteční definice

Vhodný učební zdroj – J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, ISBN 80-7184-597-3.
Funkcionální analýza je do jisté míry kombinací lineární algebry (vektory, přímky, linearita, báze, ...) a matematické analýzy (spojitost, limity, aproximace, ...).

Definice. Vektorový prostor *(zkráceně VP) je* $(V, +, \lambda, \overline{0})$, *kde*

- V *je množina,*
- $+$ *je binární operace nad* V,
- λ *je zobrazení* $V \to V$ *psané jako* $v \to \lambda v$, *definované pro každé* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(nebo* $\mathbb{C}$, *případně i jiného tělesa),*
- $\overline{0}$ *je nulová konstanta.*

Dále, zobrazení $L\colon V \to W$ *je* lineární*, pokud*

- $L(\overline{0}) = \overline{0}$,
- $L(u + v) = L(u) + L(v)$,
- $L(\lambda u) = \lambda L(u)$.

Prvky V mohou být např. derivace, zobrazení $B_n : f \to \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \sin(nx)dx$ (tj. Fourierův koeficient), či další lineární zobrazení.

Definice. Normovaný lineární prostor *(zkráceně NLP) je VP s normou, tj. funkcí* $\|.\|\colon V \to \mathbb{R}_0^+$, *že*

- $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$,
- $\|v\| = 0 \iff v = \overline{0}$,
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Norma snadno určuje metriku, pomocí $\rho(u, v) = \|u - v\|$.

Definice. *Posloupnost* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je* cauchyovská*, pokud* $\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0$, *že* $\forall k, l > k_0$ *je* $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$.

Definice. Banachův prostor *je NLP který je vůči metrice dané normou úplný (tj. každá cauchyovská posloupnost má limitu).*

Věta 10.1. *Norma je spojitá funkce.*

Důkaz. Chceme ověřit, zda $\forall x \in V\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, že $\forall y \in V$ je $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$. K tomu stačí nahlédnout, že $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Požadovanou nerovnost dostaneme z třetí podmínky na normu:

$$\|x\| = \|(x - y) + y)\| \leq \|x - y\| + \|y\| \iff |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

□

Fakt. Buďte $\|.\|_a$, $\|.\|_b$ normy na $\mathbb{R}^n$, pak jsou ekvivalentní – tj. $\exists c_1$, c_2 takové, že $\forall v \in \mathbb{R}^n$ je $c_1\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq c_2\|v\|_a$. To speciálně znamená, že všechny odvozené pojmy jako konvergence, limita, etc. nezávisí na metrice.

Věta 10.2. $\mathbb{R}^n$ *je Banachův prostor.*

Důkaz. Užijeme normu $\|.\|_\infty$, tj. $\|(v_1,\dots,v_n)\| = \max_{i\in\{1,\dots,n\}}|v_i|$. Buď $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cauchyovská posloupnost z $\mathbb{R}^n$. Pokud $\forall k,l > k_0$ je $\|x_k - x_l\|_\infty < \varepsilon$, tak i pro každé $i = 1,\dots,n$ je $|x_k^i - x_l^i| < \varepsilon$, tj. jednotlivé $(x_n^i)_{n\in\mathbb{R}}$ jsou cauchyovské posloupnosti v $\mathbb{R}$. Protože $\mathbb{R}$ je úplný, tak jednotlivé limity existují. Pro každé $i = 1,\dots,n$ označme l^i limitu posloupnosti $(x_n^i)_{n\in\mathbb{R}}$. Pak $l = (l^1,\dots,l^n)$ je limitou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Důsledek. Buď V NLP a $U \Subset V$ (tj. U je podprostor V) s $\dim U < \infty$. Pak U je uzavřená.

Důkaz. Uvědomme si, že U je isomorfní s $\mathbb{R}^n$ (díky konečné dimensi U a ekvivalenci norem), a tedy U je úplný (protože $\mathbb{R}^n$ je).
Ukážeme, že je i uzavřený. Libovolná posloupnost v U, která má limitu ve V je cauchyovská ve V. Ale protože je cauchyovská i v U, limita je proto opět v U a tedy U je uzavřený. $\square$

10.2 Ilustrativní příklady prostorů

1. $l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$, kde norma $\|.\|_p$ je definována předpisem

$$\|(v_1,\dots,v_n)\| = \left(\sum_{i\in\{1,\dots,n\}} |v_i|^p\right)^{1/p}.$$

2. $l^p = (\mathbb{R}^\infty, \|.\|_p)$, tj. prostor všech posloupností $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z $\mathbb{R}$ takových, že $\|a\|_p < \infty$. Např. $(1,1,1,\dots)$ není v l^2, $(1, 1/2, 1/3, \dots)$ je v l^2 ale není v l^1.

   Snadno je $l_n^p \Subset l^p$ – souřadnice větší než n nastavíme na nulu, a $l_i \Subset l_j \iff i \le j$. Dále, l^p je Banachův prostor (důkaz snad později).

   Ukažme třeba, že l^p je uzavřeno na sčítání – buďte $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnosti takové, že $\|a\|_p,\ \|b\|_p < \infty$ (tedy prvky l^p), pak z trojúhelníkové nerovnosti $\|(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \le \|a\|_p + \|b\|_p < \infty$ a tedy i $(a+b)$ je v l^p.

3. Prostory

$$c = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existuje}\}$$
$$c_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$$

   Pozorování – c_0 je podprostorem c a také l^p je podprostor c_0, protože sumy s konečným součtem musí mít členy jdoucí k nule.

   Prostor c je Banachův – je-li posloupnost posloupností cauchyovská, tak je i posloupnost prvků v každé souřadnici cauchyovská a tedy posloupnost limit je limitou celé posloupnosti posloupností.

   Podívejme se na zobrazení $L\colon c \to \mathbb{R}$ dané předpisem $(a_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$. Takové zobrazení je spojité, a tedy z $c_0 = L^{-1}(0)$ máme že c_0 je uzavřený, a tedy i úplný.

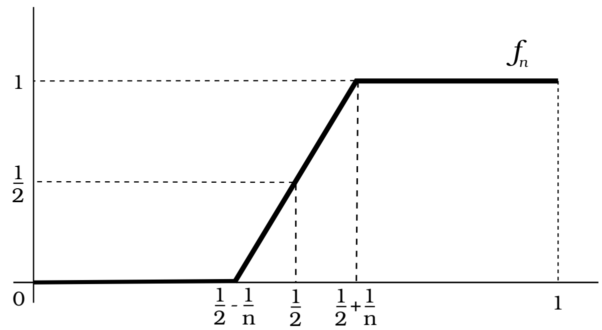
4. Buď $C([0,1])$ prostor spojitých funkcí nad $[0,1]$ (obecněji $C(K)$ nad kompaktním prostorem K) se supremovou normou (z kompaktnosti totožné s maximovou).

   Tento prostor je Banachův (norma definuje stejnoměrnou konvergenci, tedy konvergence spojitých funkcí vede ke spojité funkci).

5. Uvažme $C([0,1])$, ale s integrální normou. Tento prostor není úplný. Buď

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Funkce f_n z následujícího obrázku konvergují k f bodově, v normě $\|.\|_1$ a v integrální normě ($\int|f - f_n| \to 0$), ale nekonvergují k f stejnoměrně nebo v supremové normě ($\|f_n - f\|_{\sup} = \frac{1}{2}$).



Obrázek 3: Funkce f_n

6. $\mathcal{L}^p(X,\mu) = \{f\colon X \to \mathbb{R};\ \|f\|_p < \infty\}$, kde $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$. Trojúhelníková nerovnost, vlastnosti vektorového prostoru etc. splněny jsou, ale není pravda že by $\|f\| = 0$ implikovalo $f = 0$ (funkce nenulové na množině míry nula mají normu nula) – jedná se tedy o seminormu.

   Prostor $L^p(X,\mu) = \mathcal{L}^p(X,\mu)/\!\sim\, = \{[f]_\sim : f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)\}$ už je normovaný VP, pro $\sim$ ekvivalenci definovanou vztahem $f \sim g \iff \|f - g\| = 0$. $L^p(X,\mu)$ je dokonce úplný prostor.

Definice. *Zobrazení L je* omezené *(popř.* spojité*), pokud*

$$\exists K \in \mathbb{R}_0^+\ \forall v \in V\ \ \|v\| \le 1 \Rightarrow \|L(v)\| \le K.$$

Ilustrativně, obraz jednotkové koule kolem v je podmnožinou nějaké K-koule. Nejmenší takové K je norma zobrazení L a značí se $\|L\|$.

10.2.1 Příklady spojitých zobrazení

1. $C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1/2)$.
2. $l^1 \to \mathbb{R}$, $(a_n) \mapsto a_1 + a_2 + a_3$.

Ověřte, jestli jsou to spojitá zobrazení, případně kolik je jejich norma.

11 Funkcionální analýza (17. 5. 2012) *Zapsali: Adam Juraszek & Jan Bílek*

Definice. *Banachův prostor je vektorový prostor s definovanou normou, který je zároveň úplný.*

Příklad. $\mathbb{R}^n, l_n^p, l^p, C[0;1], L^p[0;1]$

11.1 Lineární zobrazení

Definice 11.1. *X, Y jsou Banachovy prostory, pak zobrazení $L\colon X \to Y$ je lineární zobrazení právě tehdy, když:*

1. $L(0) = 0$
2. $L(\lambda x) = \lambda L(x)$
3. $L(x+y) = L(x) + L(y)$

Definice 11.2. *Lineární zobrazení $L\colon X \to Y$ je omezené, když splňuje podmínku:*

$$(\exists C \in \mathbb{R})(\forall x \in X)\|x\| \leq 1 \implies \|L(x)\| \leq C$$

Definice 11.3. *Minimální (infimum) takové C nazveme $\|L\|$.*

Věta 11.4. *$L\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následujíci tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *L je omezené*
2. *L je spojité zobrazení*
3. *L je spojité v 0*

Důkaz. (nástin důkazu)

$2 \implies 3$. Triviální, 3 je speciálním případem 2.

$3 \implies 2$. Spojitost v $x \in X$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y)\underbrace{\|x-y\| < \delta}_{\|(x-y)-0\|<\delta} \implies \underbrace{\|L(x)-L(y)\|}_{\|L(x-y)-L(0)\|} < \varepsilon$$

$1 \implies 3$. Chceme spojitost v 0:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\|x\| < \delta \implies \|L(x)\| < \varepsilon$$

$$t = \|x\|, x' = \frac{x}{t}, \|x'\| = \frac{1}{t} \cdot \|x\| = 1$$

$$L(x) = t \cdot L(\frac{x}{t}) = t \cdot L(x')$$

$$\|L(x)\| = t \cdot \|L(x')\| \leq C \cdot t < C \cdot \delta$$

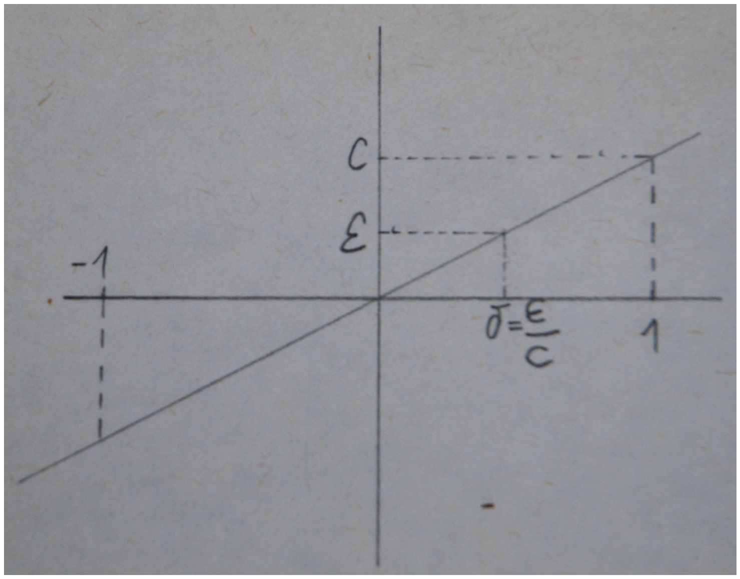
Stačí použít $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, viz Obrázek 1.

□

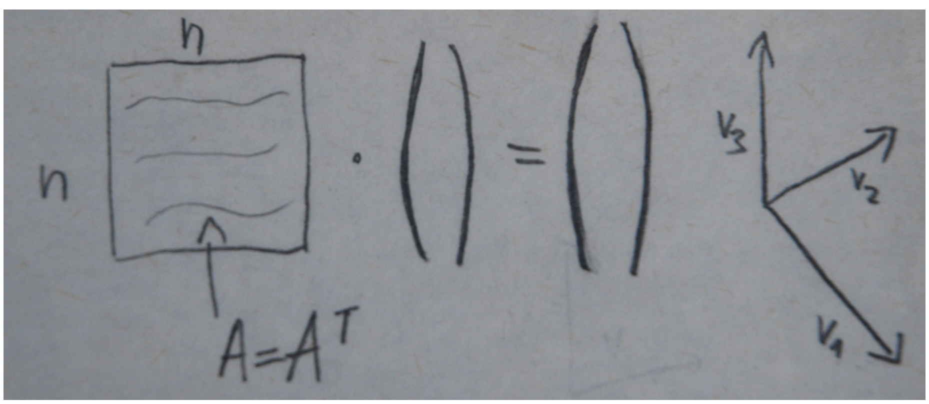
$L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Příklad. *(Obrázek 2)*
A je matice zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a A je symetrická, pak

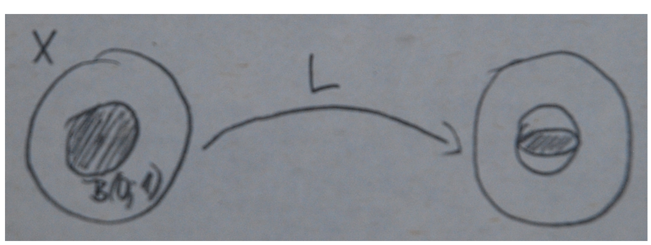
$$C = max\,\{|\lambda_{max}|, |\lambda_{min}|\}$$



Obrázek 4: Volba δ.



Obrázek 5: Symetrická matice zobrazení A a vlastní vektory.



Obrázek 6: Lineární zobrazení koule.

Příklad. *(Obrázek 3)*
Lineární zobrazení $L\colon X \to Y$*:*

$$L(B(0;1)) \subseteq B(0;\|L\|)$$

Pozorování.

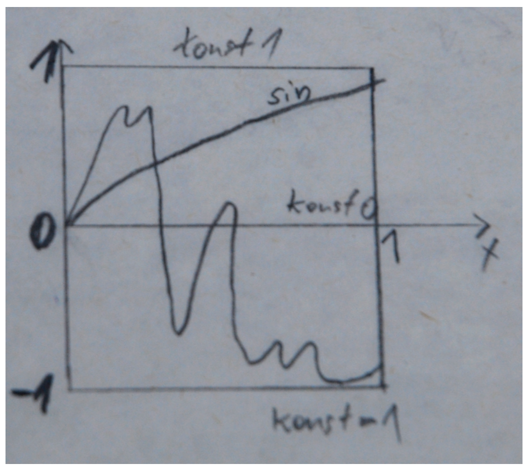
$$\|L\| = \sup\{\|L(x)\| \colon x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

Příklad. *(zadaný minule)*

$$L \colon C[0;1] \to \mathbb{R}, L(f) = f\left(\frac{1}{2}\right), \|L\| = ?$$

Řešení. podle předchozího pozorování:

$$\|L\| = \sup\left\{\underbrace{\|L(f)\|}_{|L(f)|} \colon \underbrace{\|f\| \leq 1}_{\sup_{x\in(0;1)}|f(x)|=1}\right\}$$



Obrázek 7: Obrázek funkcí na $[0;1] \times [-1;1]$.

Poznámka. Lépe by mělo být zadání formulované jako $L \colon (C[0;1], \|\ldots\|_{\sup}) \to (\mathbb{R}, \|\ldots\|)$

Poznámka. *Uvažujme zobrazení z předchozího příkladu maticí* $A_{1\times\dim(C[0;1])}$*; jelikož dimenze je nekonečná, nedává tento zápis smysl.*

$$L(f) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \int f d\mu$$

a musí platit $\mu E = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \in E \\ 0 & \frac{1}{2} \notin E \end{cases}$

11.1.1 Funkcionál

Nechť X je Banachův prostor, pak spojité lineární zobrazení $X \to \mathbb{R}$ se nazývá funkcionál. Množnina funkcionálů se značí X^*.
$L, M \in X^* \implies L + M \in X^*$ je skoro vidět, že součet je lineární.

Důkaz. (nástin důkazu)

$$\|L+M\| = \sup_{\|x\|\le 1} |L(x)+M(x)| \le \sup_{\|x\|\le 1} (|L(x)|+|M(x)|)$$

$$\le \sup_{\|x\|\le 1} |L(x)| + \sup_{\|x\|\le 1} |M(x)| \le \|L\|+\|M\|$$

$\implies L+M$ je spojitá

□

Funguje násobení konstantou, to je vidět.
Platí i $L \in X^*, L \neq 0 \implies \|L\| \neq 0$?

Důkaz. (nástin důkazu)

$$(\exists x \in X) L(x) \neq 0$$

$$x' = \frac{x}{\|x\|} \ldots \|x'\| = 1$$

$$L(x') \neq 0 \implies \underbrace{\|L(x')\|}_{\le \|L\|} \neq 0$$

□

X^* je lineární prostor s normou. X^* je úplný $\implies$ Banachův prostor

11.1.2 Vlastnosti X^*

1. $X = (\mathbb{R}, \|\ldots\|_2) = l_n^2 \implies X^* = l_n^2$

$$x \in X \& L \in X^* \implies L(x) = \sum_i L_i(x_i)$$

2. $C[0,1]^*$ jsou míry
3. Věta 1.9 (Frechet-Riesz), ale nejdříve pár definic:

Definice 11.6. *Skalární součin $X \times X \to \mathbb{R}$ je bilineární zobrazení.*
značení: $x, y \mapsto x \cdot y = (x,y) = \langle x, y\rangle = x^T y$

- $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$
- $(x,y) = (y,x)$
- $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
- $(x,x) \ge 0$
- $(x,x) = 0 \equiv x = 0$

Věta 11.7. *(x,y) je spojité v obou složkách.*

Důkaz. (nástin důkazu)

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \implies \underbrace{\|(x_1,y)-(x_2,y)\|}_{=\|(x_1-x_2,y)\|\le\|x_1-x_2\|\cdot\|y\|} < \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|y\|}$$

□

Definice 11.8. *Hilbertův prostor je vektorový prostor se skalárním součinem, který indukuje normu.*
$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Věta 11.9 (Frechet-Riesz)**.** *X je Hilbertův prostor, pak $X^* = X$.*

Důkaz. (nástin důkazu) $X^* \supseteq X$ je vidět. □

11.1.3 Zajímavost – odbočka

Matice $(a_{m,n}), m, n \in \mathbb{Z}, a_{m,n} \in \mathbb{R}$.
$(\forall m, n) a_{m,n} = \frac{a_{m-1,n} + a_{a+1,n} + a_{m,n-1} + a_{m,n+1}}{4}$

		1	e		
	0	1	2	π	
		1	x		

Obrázek 8: Na tomto obrázku není splněna podmínka kvůli nule. Její okolí je totiž kladné, takže průměr aritmetický průměr sousedních polí není 0.

Když trochu zobecníme situaci z Obrázku 5, všimneme si, že minimum z čísel v tabulce nemůže sousedit s vyššími čísly (zde sousedí 0 a 1), jinak se podmínka poruší. Shrnuje to následující věta.

Věta 11.10. $(\forall m, n) a_{m,n} \geq 0 \implies a_{m,n} = konst$
(Bez důkazu.)

11.1.4 Hilbertovy prostory

Věta 11.11. *H Hilbertův prostor, M uzavřený podprostor H*
$(\forall x \notin M)(\exists! x_0 \in M)\colon \|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, M) := \inf\{\|x - x'\|, x' \in M\}$

Důkaz. 1) x_0 je jednoznačné
Sporem:
Nechť existuje další takové x_0, pojmenujeme ho x_0'. Zvolíme vektory a, b, že $a = x - x_0$ a $b = x - x_0'$. A dále platí $(\forall x_2 \in M)\colon \|x - x_2\| \geq \|a\| = \|b\|$. Zvolme x_2 tak, aby $c = \frac{a+b}{2}$.
Uvažujme $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ v reálných číslech; platí obdobně:

$$(a + b, a + b) + (a - b, a - b) = 2(a, a) + 2(b, b)$$

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

$$\text{speciálně pro} \|a\| = \|b\| \implies = 4\|a\|^2$$

Tedy:

$$(2\|a\|)^2 \leq \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 = 4\|a\|^2$$

$$\implies \|a - b\| = 0 \implies a = b \implies x_0 = x_0'$$

2) x_0 existuje
plyne z úplnosti □

K zamyšlení: Větička neplatí v obecném Banachově prostoru; najděte příklad (jde v $\mathbb{R}^n$)

12 Pokračování – Hilbertovy prostory (24.5.2012) *Zapsal: Karel Tesař & Jan Voborník*

Ukázka (ne)jednoznačnosti.

Věta 12.1. *Buď $M \Subset H$ Hilbertův prostor, potom $x \in H \quad \Rightarrow \quad \exists! x_0 \in M \quad \|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, M)$.*
(Bez důkazu.)

Příklad 12.2. *Protipříklad pro H bez s.s.:*
V $\mathbb{R}^2$ s $\|\_\|_\infty$ mají všechny body na úsečce $[[-1,0],[1,0]]$ vzdálenost 1 od bodu $[0,1]$.

Definice 12.3. *Ortonormální báze je maximální ortonormální soustava.*

Příklad 12.4. *Pro $\mathbb{R}^n$ máme ortonormální bázi $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.*

Příklad 12.5. *$B = \{c \sin nx, c \cos nx \quad | n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báze v $L^2[-\pi, \pi]$.*
($c \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta)

Důkaz. (nástin důkazu) $a_n = \langle f, \cos nx\rangle$ a $b_n = \langle f, \sin nx\rangle$ (podobně jako ve Fourierových řadách). □

Definice. *Lineární obal:* $\operatorname{lin} B = \langle B \rangle := \{\sum_{i=1}^n c_i b_i \quad | n \in \mathbb{N}, \quad c_i \in \mathbb{R}, b_i \in B\}$
Jeho rozšíření: $\overline{\operatorname{lin}} B = \overline{\operatorname{lin} B} := \{\sum_{i=1}^\infty c_i b_i \quad | c_i \in \mathbb{R}, b_i \in B\}$

Věta 12.6. *Nechť H je Hilbertův prostor a $B \subseteq H$ ortonormální soustava, následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *B je báze*
2. *$x \in H \quad \& \quad \forall b \in B \quad x \perp b \quad \Rightarrow \quad x = 0$*
3. *$\overline{\operatorname{lin}} B = H$*
4. *$\|x\|^2 = \sum_{b \in B} |\langle x, b\rangle|^2$*
5. *$x = \sum_{b \in B} \langle x, b\rangle \cdot b$*
6. *$\langle x, y\rangle = \sum_{b \in B} \langle x, b\rangle \cdot \langle y, b\rangle$*

Důkaz. (nástin důkazu) $1 \Leftrightarrow 2$ je zřejmé
$\neg 3 \Rightarrow \neg 2$: Označme $M = \overline{\operatorname{lin}} B$ a nechť $M \neq H$, tedy $M \subset H$. Kdyby existovalo $\{H \setminus \{0\}\} \ni z \perp M$, potom $(\langle z, x\rangle = 0 \quad \forall x \in M)$ a jsme hotovi. Nechť tedy existuje $\{H \setminus \{0\}\} \ni n \not\perp M$, potom $\exists m \in M, \quad \langle n, m\rangle \neq 0$. Přejděme k novému n operací $n \to n + lm$ kde l volíme tak, aby $\langle n + lm, m\rangle = 0$. Tento krok provedeme pro každé $m \in B$, díky vlastnostem HP bude po našem postupu n různé od 0 a kolmé na B.
(zbytek bez důkazu) □

Věta 12.7 (Geometrická Hahn-Banachova věta)**.** *Buď E normovaný lineární prostor (nlp), $A, B \subset E$ disjunktní konvexní. Potom A, B lze oddělit nadrovinou, tedy existuje $\exists f \in E^*, \quad f : E \to \mathbb{R}$ lineární spojitá t.ž. $\forall x \in A \quad f(x) > \alpha$ a $\forall x \in B \quad f(x) < \alpha$ za předpokladu*

1. *A, B jsou otevřené*
2. *A je uzavřená a B kompaktní*

Příklad. *V HP mají lineární spojité funkce tvar $f(x) = \langle x, v\rangle$*

Chceme umět nějak obecně poznávat „rohy“ množin, včetně těch „zakulacených“. To nás přivádí na následující definici:

Definice. *Buď $A \subseteq X$, A konvexní. $x \in A$ je extremální bod A ($x \in \operatorname{ext} A$), pokud $\nexists a, b \in A: \quad x \in (a, b)$. Kde $(a, b) = \{ta + (1-t)b \quad | \quad t \in (0,1)\}$ je otevřená úsečka.*

Definice 12.8. *Konvexní obal množiny M je* $\operatorname{conv} M = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i, \quad \lambda_i \geq 0, \sum \lambda = 1, \quad n < \infty\}$.
Podobně $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i m_i, \quad \lambda_i \geq 0, \sum \lambda = 1\}$.

Příklad. $A = B_{\|-\|_2}(0,1) \Rightarrow \operatorname{ext} A = \{x : \|x\|_2 = 1\}$ – *kružnice; má roh všude*

Příklad. $A = B_{\|-\|_\infty}(0,1) \Rightarrow \operatorname{ext} A = \{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}$ – *čtverec*

Věta 12.9 (Krein-Milmanova věta)**.** *Buď $A \subseteq X$, A konvexní, kompaktní a X nlp (lze oslabit). Potom $\operatorname{ext} A \neq 0$ a $A = \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} A$.*

Důkaz. $A \supseteq \operatorname{ext} A \overset{A \text{ konvexní}}{\Rightarrow} A \supseteq \operatorname{conv} \operatorname{ext} A \overset{A \text{ uzavřená}}{\Rightarrow} A \supseteq \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} A$.
„$\subseteq$“ sporem: $A \supsetneq \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} A =: B \Rightarrow \exists x \in A \setminus B$ Protože $\{x\}$ je kompaktní a B uzavřená, můžeme použít Hahn-Banachovu větu (12.7), podle které $\exists f$ spojitá, lineární funkce a $\exists \alpha \quad f(x) > \alpha > f(B)$, ale protože $\operatorname{ext} A \subseteq \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} A = B$, dostáváme spor s větou: Spojitá funkce na konvexní množině A nabývá minima a maxima na $\operatorname{ext} A$. □

Příklad 12.10. *Buď $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}, \quad f > 0,$*

$$\forall m, n \quad f(m,n) = \frac{f(m+1,n) + f(m-1,n) + f(m,n+1) + f(m,n-1)}{4}.$$

Potom f je konstantní.

Důkaz. Definujme $A = \{f, \quad \text{splňují předpoklady}\}$, A je uzavřená na součty a násobky, jde tedy o konvexní kužel. Vezměme $f \in \operatorname{ext} A$ a definujme $Tf \dots$ posun f o 1 vpravo ($Tf(m,n) = f(m-1,n)$) a $Sf \dots$ posun f o 1 nahoru. Zřejmě $Tf, T^{-1}f, Sf, S^{-1}f \quad \in A$. Dále $f = \frac{Tf + T^{-1}f + Sf + S^{-1}f}{4}$, f je tedy konvexní kombinace funkcí z A a nutně $Tf = Sf = f$, proto také f je konstantní. Díky Krein-Milmanově větě (12.9) je každá funkce A lineární kombinací konstantních funkcí, a tedy také konstantní. □