Stručné poznámky z MA3 — ZS 2011/12

Robert Šámal

14. března 2012

Tento text se vztahuje k předmětu NMAI056 – Matematická analýza III pro informatiky. POZOR: text je zatím hodně syrový, neúplný, atd. Pokud narazíte na nějakou nesrovnalost, dejte mi prosím vědět. (Za první komentáře děkují V. Jelínkovi, J. Gadžalovi, J. Novotné, T. Malečkovi.)
Najdete zde soupis definic, vět a něco málo dalších poznámek. Důkazy převážně chybí, občas je uveden jeho nástin. Je zde však uvedeno, pokud věta byla na přednášce bez důkazu, případně pokud byla dokázána jen ve slabší verzi. Pokud jste důkaz "nechytili" na přednášce, poraďte se s kolegou nebo doporučenou literaturou.

(Začátek přednášky 7.10.)

1 Vícerozměrný integrál

1.1 Definice

Definice. *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a_i \le b_i$ *pro* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Množinu* $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_n, b_n]$ *nazveme* (n-rozměrný) interval *v* $\mathbb{R}^n$, *taktéž zobecněný interval, zobecněný kvádr. Definujeme* objem I *jako*

$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Definice. *Dělením intervalu* $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ *rozumíme libovolnou množinu* $\mathcal{I}$ *vzniklou tak, že každý z intervalů* I_i *rozdělíme na uzavřené podintervaly (překrývající se jenom koncovými body) a vezmeme všechny jejich součiny.*

Definice. *Nechť* I *je* n*-rozměrný interval, Nechť* $f : I \to \mathbb{R}$ *je omezená funkce a* $\mathcal{I}$ *je dělení* I. *Definujme* horní a dolní součty

$$S(f, \mathcal{I}) = \sum_{B \in \mathcal{I}} vol(B) \sup\{f(x) : x \in B\}$$
$$s(f, \mathcal{I}) = \sum_{B \in \mathcal{I}} vol(B) \inf\{f(x) : x \in B\}$$

horní Riemannův integrál

$$(R)\overline{\int_I} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\Big\{S(f, \mathcal{I});\ \mathcal{I} \textit{ je dělení } I\Big\}$$

a dolní Riemannův integrál

$$(R)\underline{\int_I} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\Big\{s(f, \mathcal{I});\ \mathcal{I} \textit{ je dělení } I\Big\}$$

Pokud $(R)\overline{\int_I} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\underline{\int_I} f(x)\,\mathrm{d}x$*, pak řekneme, že* f *je* Riemannovsky integrovatelná *na* I *a klademe*

$$(R)\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\underline{\int_I} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Množinu funkcí majících Riemannův integrál značíme $R(I)$*.*

Obdobně jako v minulém semestru pro jednorozměrný případ platí

1. věta o zjemnění dělení: pokud $\mathcal{I}'$ je zjemnění $\mathcal{I}$, tak

$$s(f,\mathcal{I}) \le s(f,\mathcal{I}') \le S(f,\mathcal{I}') \le S(f,\mathcal{I}).$$

2. linearita R. integrálu
3. monotonie R. integrálu (pokud $f \le g$ na I tak $\int_I f \le \int_I g$
4. aditivata R. integrálu vzhledem k intervalům
5. spojité funkce mají R. integrál

Poslední bod si tentokrát řekneme v silnější podobě. Pohledem na obrázek se dá snadno uvěřit, že funkce má Riemannův integrál i tehdy, když je nespojitá třebas v deseti bodech – v každém dostatečně jemném dělení budou tyto špatné body pokryty intervaly, které budou dohromady dost krátké, aby nám “nepokazily měření”. Pro zpřesnění této myšlenky musíme zavést nový pojem na měření velikosti množiny.

Definice. *Buď* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *libovolná množina. Řekneme, že* X *je* nulová*, pokud pro libovolné* $\varepsilon > 0$ *existuje (nekonečná) posloupnost zobecněných intervalů* I_1*,* I_2*, … taková, že*

- $X \subseteq \bigcup_n I_n$ *a*
- $\sum_n \mathrm{vol}(I_n) < \varepsilon$*.*

Příklad. *1. Konečná množina je nulová.*
2. Spočetná množina je nulová.
3. Konečné sjednocení nulových množin je nulová množina.
4. Totéž pro spočetné sjednocení.
5. Nalezněte nespočetnou nulovou množinu!
6. Na nulové množině můžeme libovolně změnit danou funkci a její Riemannův integrál se nezmění, pokud výsledná funkce má zase Riemannův integrál.

Věta 1.1 (Lebesgueova o Riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť* f *je omezená na* n*-rozměrném intervalu* I*. Pak* $f \in R(I)$ *právě tehdy, když množina bodů nespojitosti* f *je nulová.*
(Bez důkazu.)

Pro zjištění, zda je nějaká množina nulová, se místo definice často hodí následující věta.

L Věta 1.2 (graf spojité funkce je nulový)**.** *Buď* I *interval v* $\mathbb{R}^n$*,* $f : I \to \mathbb{R}$ *spojitá funkce. Pak množina* $\{(x, f(x)) : x \in I\}$ *– čili graf funkce* f *v* $\mathbb{R}^{n+1}$ *– je nulová množina.*

1.2 Fubiniho věta

Teď už víme, co integrál je, a kdy existuje, zbývá “detail” – jak ho spočítat?

T Věta 1.3 (Fubiniho věta)**.** *Nechť $f : I \times J \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Pak platí*

$$\int_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I \left(\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y\,,$$

pokud první z integrálů existuje.
(Dokázali jsme jen rovnost prvního a druhého integrálu pro případ, kdy $\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y$ existuje pro všechna $x \in I$.)

Z této věty vyplývá, že n-rozměrný integrál lze spočítat n-násobným opakováním jednorozměrné integrace.

$$(R)\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1}\Big(\cdots\Big(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\Big(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_n\Big)\,\mathrm{d}x_{n-1}\Big)\ldots\Big)\,\mathrm{d}x_1\,.$$

[Jednoduchý příklad.]
Pozor, podmínky ve větě jsou důležité: existují funkce, kde první integrál ve znění věty neexistuje, ale druhý a třetí integrál ano a **nerovnají se**! [Priklad]

(Začátek přednášky 14.10.)
Obecnější verze **Fubiniho věty** hovoří o funkcích, které nejsou definovány na intervalu. Pro množinu $E \subseteq I$, kde I je interval a funkci $f : E \to \mathbb{R}$ definujeme přirozeným způsobem

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I f(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde $\chi_E(x)$ je charakteristická funkce množiny E (tj. funkce, která je 1 pro $x \in E$ a 0 jinak). Dá se ukázat (jednoduše), že tento integrál, pokud existuje, nezávisí na I. Pro existenci je nutné si uvědomit, že funkce $f(x)\chi_E(x)$ bude nejspíš nespojitá na hranici E, tj. s ohledem na Lebesguovu větu je vhodné, aby tato hranice byla nulová množina.
Buď $E \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Označme $\pi_1 E$ *projekci* E na prvních m souřadnic, $\pi_2 E$ projekci na druhých n souřadnic. Dále označme $E^{x,\cdot}$ *řez* množinou E v bodě $x \in \mathbb{R}^m$, tj.

$$E^{x,\cdot} = \{y \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in E\}$$

a obdobně $E^{\cdot,y}$.

Věta 1.4 (obecnější Fubiniova)**.** *Buď nyní $f : E \to \mathbb{R}$ omezená funkce, přičemž hranice množiny E (značíme ∂E) je nulová množina. Pokud $\int_E f$ existuje, pak existují všechny následující integrály a rovnají se:*

$$\int_E f = \int_{\pi_1(E)}\int_{E^{x,\cdot}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\pi_2(E)}\int_{E^{\cdot,y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

(Bez důkazu.)

1.3 Věta o substituci

Definice. *Buď $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ libovolné zobrazení. Řekneme, že φ je* regulární, *pokud*

- *$\varphi \in C^1(U)$ (tj. existují všechny parciální derivace a jsou spojité)*
- *φ je prosté*

- *matice $D\varphi(u)$ má plnou hodnost pro všechna $u \in U$.*

Hodnotu $\mathcal{J}\varphi(u) = \det D\varphi(u)$ nazveme Jakobiánem *zobrazení φ v bodě u.*

Věta 1.5 (o substituci)**.** *Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená, její hranice ∂A buď nulová a $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ buď regulární na vnitřku A. Pak pro funkci $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ platí*

$$\int_A (f \circ \varphi)|\mathcal{J}\varphi| = \int_{\varphi(A)} f\,,$$

pokud oba integrály existují.
(Bez důkazu.)

Poznámka. *Na přednášce byl opomenut poslední řádek ve znění věty. V závislosti na tom, jaký druh integrálu je použit totiž někdy není potřeba. Nicméně pro námi definovaný Riemannův integrál musí integrovaná funkce být omezená. A mohlo by se snadno stát, že na jedné straně rovnosti ve Větě 1.5 je funkce omezená a na druhé neomezená.*

1.4 Aplikace

Objem (obsah, velikost, *míru*) obecné množiny definujeme jako $\mathrm{vol}(E) = \int_E 1\,\mathrm{d}x$.

1. Pomocí Fubiniovy věty snadno odvodíme vzorec pro obsah plochy pod křivkou $y = f(x)$ (pro $f(x) \geq 0$).

2. Podobně také objem rotačního tělesa.

3. Obsah obecné plochy nebudeme definovat (šlo by to podobně, jako jsme v letním semestru definovali délku křivky), ale pro zajímavost si uveďme vzorec pro obsah plochy – grafu funkce $f(x, y)$ pro $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\int_\Omega \sqrt{1 + (\frac{\partial}{\partial x} f)^2 + (\frac{\partial}{\partial y} f)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

4. Užitím věty o substituci a polárních souřadnic můžeme snáze spočítat některé plochy, např. plochu kruhu.

5. Užitím věty o substituci a Fubiniho věty spočteme $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$. To je pozoruhodné nejen nečekaným výsledkem, ale také tím, že integrovaná funkce sice má primitivní funkci (jako každá spojitá funkce), ale tuto funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Výsledek se navíc náramně hodí ve statistice, neboť funkce $e^{-x^2/2}$, tzv. Gaussova křivka, popisuje tzv. normální rozdělení, které aproximuje rozdělení mnoha náhodných veličin ze života (výška, váha, IQ náhodného člověka, poruchovost přístrojů, kombinační čísla, ...).

(Začátek přednášky 21.10.)

2 Analýza pro komplexní čísla

2.1 Úvod o komplexních číslech, derivace

- Lze je chápat jako reálná čísla "obohacená" o odmocninu z -1 – takto to dělají algebraici a píše se pak $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1})$. Je ale trochu potíž zdůvodnit, jak se to přesně dělá. Za odměnu pak můžeme pracovat i s jinými tělesy, jako třeba $Q(\sqrt{3})$.
- Jednodušší je položit $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ s tím, že místo (x, y) budeme psát $x + iy$.
- Definujeme sčítání a odčítání jako u vektorů, násobení pomocí pravidla $i^2 = -1$ a asociativity, komutativity, distributivity.
- Nenulovým číslem lze dělit: $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.
- Takže komplexní čísla tvoří těleso – oproti $\mathbb{R}$ je však nelze uspořádat na uspořádané těleso.
- Absolutní hodnota $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ je běžná eukleidovská vzdálenost od počátku.
- Komplexně sdružené číslo $\overline{x + iy} = x - iy$.
- *Geometrický tvar:* nenulové komplexní číslo lze jednoznačně psát ve tvaru $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $r = |z| > 0$ a φ je úhel mezi kladnou poloosou x a vektorem (x, y).
- Jiný zápis: $z = re^{i\varphi}$. Platí totiž

  $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

  Otázka: Proč to platí? Je to věta, nebo definice? Co je vlastně definice sin, cos, ...?
- Jeden z přístupů: geometricky odvodíme součtové vzorce pro sinus a cosinus, s těch pak vztahy $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$. Odsud vyjádříme sin, cos pomocí mocninných řad (ty ještě potkáme). Exponenciálu pomocí mocninné řady definujeme. A pak už vše funguje ...
- $(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- Důsledek – tzv. Moivreova věta:

  $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\,.$$
- Jaké geometrické zobrazení popisuje funkce $z \mapsto zi$?
- Výše uvedeného lze využít pro překvapivý (i když ne zvlášť krátký) důkaz Thaletovy věty.

Komplexní čísla lze přirozeně vybavit metrikou: $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Pak můžeme využít obecné definice a věty o limitách posloupností v metrických prostorech. Protože v $\mathbb{C}$ můžeme i sčítat, můžeme obdobně jako v $\mathbb{R}$ zkoumat řady: nekonečný součet definujeme jako limitu částečných součtech, bude opět platit nutná podmínka, jakož i vztah normální a absolutní konvergence. Nemůžeme už používat Leibnizovo kritérium, neboť u komplexních čísel nelze říct, kdy mají "střídavá znaménka". Zobecněním a zesílením Leibnizova kritéria bude však tzv. Abel-Dirichletovo kritérium. Dále prozkoumáme komplexní derivaci – pořádně řečeno, derivaci komplexní funkce komplexní proměnné. Definice vypadá formálně jako derivace reálné funkce reálné proměnné, ale některé vlastnosti jsou odlišné.

Definice. *Buď Ω otevřená množina v $\mathbb{C}$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ libovolná funkce. Definujeme* derivaci funkce f v bodě *$z \in \Omega$ předpisem*

$$f'(z) = \lim_{h \to 0; h \in \mathbb{C}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Funkci, která má derivaci v každém bodě v Ω nazveme holomorfní na Ω. *Množinu všech takových funkcí značíme $H(\Omega)$.*

Jediný rozdíl oproti definici reálné derivace je jen v tom, že h je zde komplexní číslo. Tento rozdíl však znamená, že existence komplexní derivaci je silnější podmínka: limita musí vyjít stejně, bez ohledu na směru, ve kterém se h blíží k 0. Tuto úvahu zpřesňuje následující věta. Napřed si však musíme funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ popsat jako funkci $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tj. budeme psát $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ (kde u, v jsou reálné funkce dvou proměnných). Lze čekat, že bude nějak souviset derivace komplexní funkce f a derivace funkcí u, v. I o tom hovoří následující věta.

L Věta 2.1 (Cauchy–Riemannovy podmínky pro existenci derivace)**.** *Buď Ω otevřená množina v $\mathbb{C}$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ libovolná funkce. Buď dále $z \in \Omega$. Buďte dále u, v reálné funkce dvou reálných proměnných, pro které $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Pak f' existuje v $z = x + iy$, právě když u i v mají v bodě (x,y) totální diferenciál a navíc platí*

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \qquad a \qquad \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x,y).$$

Pokud tyto podmínky platí, tak $f'(z) = a + bi$, kde jsme označili $a = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y)$ a $b = \frac{\partial}{\partial x} v(x,y)$.

(Dokázali jsme jen jeden směr: pokud derivace existuje, jsou splněny uvedené podmínky.)

Poznámka. *Na přednášce bylo chybně uvedeno, že stačí aby u a v měly parciální derivace – omlouvám se za zmatení. Nicméně předvedený důkaz byl správně a pro "hezké funkce" se rozdíl neprojeví.*

Na druhou stranu všechna pravidla pro derivaci součtu, součinu, podílu a inverzní funkce platí stejně jako pro reálné funkce.

2.2 Mocninné řady

Definice. *Pro libovolná komplexní čísla $z_0, a_0, a_1, a_2 \dots$ nazveme komplexní funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danou předpisem*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

mocninnou řadou se středem v z_0.

Poloměr konvergence *této mocninné řady je číslo*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Povoleny jsou i případy $R = \frac{1}{\infty} = 0$ a $R = \frac{1}{+0} = \infty$. (Případ $R = 0$ ale není zajímavý.)

L Věta 2.2 (poloměr konvergence MŘ)**.** *Uvažme mocninnou řadu (se značením jako výše). Pak*

1. *pro $|z - z_0| < R$ řada konverguje (funkce je definována),*

2. *pro* $|z - z_0| > R$ *řada diverguje (funkce není definována),*
3. *pro* $|z - z_0| = R$ *nevíme.*

Důkaz. V prvním případě řada konverguje dokonce absolutně (podle odmocninového kritéria). V druhém případě naopak není splněna nutná podmínka konvergence. $\square$

(Začátek přednášky 28.10.)
státní svátek

(Začátek přednášky 4.11.)

L Věta 2.3 (operace uvnitř kruhu konvergence)**.** *Jsou-li* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n(z-z_0)^n$ *mocninné řady konvergující pro* $|z| < R$ $(R > 0)$*. Pak pro* $|z - z_0| < R$ *platí také*

1. $\alpha f(z) = \sum_{n\geq 0}(\alpha a_n)(z - z_0)^n$,
2. $f(z) \pm g(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n \pm b_n)(z - z_0)^n$,
3. $f(z)g(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z - z_0)^n$*, kde* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

T Věta 2.4 (Význam koeficientů MŘ)**.** *1.* $f(z_0) = a_0$

2. $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$
3. $f'(z_0) = a_1$

T Věta 2.5 (Derivování MŘ člen po členu)**.** *Buď* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ *mocninná řada s poloměrem konvergence* $R > 0$*. Pak je*

$$\sum_{n\geq 1} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

také mocninná řada s poloměrem konvergence R *a její hodnota se v kruhu konvergence rovná* $f'(z)$*.*

(Začátek přednášky 11.11.)

Poznámka. *(1) Odsud už snadno plyne, že je-li nějaká funkce rovna součtu mocninné řady, lze koeficienty získat derivováním:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\,.$$

(Podobnost s Taylorovým polynomem není náhodná!) Pozor však na to, že ne každá funkce je součet MŘ: Třeba $f(x) = e^{-1/x^2}$ *(položíme* $f(0) = 0$*) má všechny derivace nulové, třebaže sama je nenulová. Tato "podivnost" však platí jen pro reálné funkce (rozmyslete si, že v komplexní rovině není* f *spojitá v* 0*). Brzy uvidíme, že pro komplexní funkce je situace mnohem hezčí.*
(2) Z přechozího též plyne, že koeficienty MŘ s kladným poloměrem konvergence jsou určeny jednoznačně.
(3) Analogicky k předchozí větě můžeme i integrovat: MŘ $F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *má také poloměr konvergence rovný* R *a* $F' = f$*.*

APLIKACE 1) defce exp 2) Fibonacciho čísla, Catalanova čísla – postup jako v Kombagře, ale s analýznickými detaily

2.3 Integrování funkce komplexní proměnné

Definice. *Funkci* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *(pro* $a < b$ *reálná) nazveme* křivkou*, pokud je* φ *spojitá a až na konečně mnoho bodů existuje* φ'*.*

Definice. *Buď* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *křivka, a* $f : \varphi([a, b]) \to \mathbb{C}$ *komplexní funkce. Křivkový integrál funkce* f *podél křivky* φ *je definován předpisem*

$$\oint_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\varphi f := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Poznámka. *Není těžké si rozmyslet, že hodnota křivkového integrálu závisí jen na tom, jakou množinu a jakým směrem* φ *probíhá, ne už na rychlosti, kterou ji probíhá. Jinými slovy, pokud* $\psi : [c, d] \to [a, b]$ *je na, pak platí* $\oint_\varphi f = \oint_{\varphi\circ\psi} f$*.*

Poznámka. *Křivkový integrál by šel definovat i jinak, podobně jako Riemannův integrál reálné funkce reálné proměnné. Např. pro spojitou funkci* f *(a trochu nepřesně) lze psát*

$$\oint_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \lim \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) f(z_k)$$

přičemž $z_k = \varphi(t_k)$ *pro nějaké dělení* (t_k) *intervalu* $[a, b]$, lim *značí limitu pro normu dělení jdoucí k nule.*

L Věta 2.6 (Integrál po uz. křivce z funkce, která má primitivní funkci)**.** *Pokud má* f *primitivní funkci* F *(tj. platí* $F' = f$*), pak (při značení jako výše)*

$$\oint_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\,.$$

Důkaz. Je totiž $F(\varphi(t))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. □

T Věta 2.7 (Cauchyho věta)**.** *Buď* Ω *otevřený kruh v* $\mathbb{C}$ *a funkce* f *holomorfní na* Ω*. Buď dále* $\varphi : [a, b] \to \Omega$ *uzavřená křivka. Pak*

$$\oint_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

(Důkaz jen pro φ tvořící hranici trojúhelníku – nebude zkoušen.)

Poznámka. *Cauchyho věta platí i o něco obecněji: pro množinu* Ω*, která je otevřená a* jednoduše souvislá*. Co je jednoduše souvislá množina zde definujeme jen přibližně: jedná se o množinu* M*, kde pro libovolné dva body* $x, y \in M$ *existuje křivka v* M *z* x *do* y *a pro libovolné dvě takové křivky* P*,* Q *je možné spojitou úpravou změnit* P *na* Q*. (Druhá podmínka nefunguje pro kružnici: horní a dolní polokružnice jsou dvě křivky, které na sebe nelze spojitě transformovat.)*

(Začátek přednášky 18.11.)
Důkaz Cauchyovy věty
Zmínky o Cauchyho vzorci
Aplikace Cauchyovy věty na Fresnelovy integrály: $FS = \int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$, $FC = \int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x$.

(Začátek přednášky 25.11.)

3 Stejnoměrná konvergence

3.1 Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

První pojem, který jsme v analýze v prvním ročníku potkali, byla konvergence posloupnosti bodů. Tento pojem se dá zavést několik podobnými způsoby, ale těžko vymyslet nějaký způsob neekvivalentní, který by dával smysl. Pro konvergenci posloupností vektorů v $\mathbb{R}^d$ jsme už měli na výběr jakou metriku použít – ale ukázalo se, že její volba na konvergenci nemá vliv. Nyní potkáme situaci, kdy si budeme moci vybrat mezi různými definicemi konvergence.
V dalším bude A nějaká (nekonečná) množina a $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ nějaké funkce (mohly by být i $A \to \mathbb{C}$, ale pro názornost se přidržíme reálného případu).

Definice. *V situaci jako výše řekneme, že f_n konvergují na A stejnoměrně k f, pokud*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(\forall x \in A)|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definujme dále pro funkci $f : A \to \mathbb{R}$ její supremovou normu *předpisem*

$$\|f\|_{sup} = \sup\{f(x) : x \in A\}\,.$$

L Věta 3.1 (Charakterizace stejnoměrné konvergence pomocí supremové metriky)**.** *$f_n \rightrightarrows f$ právě tehdy, když $f_n \to f$ ve smyslu supremové metriky, neboli*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{sup} = 0\,.$$

Důkaz. (nástin důkazu) Stačí si všimnout, že místo $(\forall x \in A)|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ lze ekvivalentně psát $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\} \leq \varepsilon$. □

T Věta 3.2 (Cauchyho o stejnoměrné limitě spojitých funkcí)**.** *Nechť f_n jsou spojité funkce na metrickém prostoru X. Nechť dále $f_n \rightrightarrows f$ na X. Pak je f spojitá na X.*

T Věta 3.3 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Buď f_n posloupnost funkcí na množině A. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní*

1. *existuje f tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na A*
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n > n_0)\|f_m - f_n\| < \varepsilon$

L Věta 3.4 (Riemannův integrál ze stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí)**.** *Buďte f_n funkce definované na $[a, b]$. Nechť $(R)\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ existuje pro všechna n a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} (R)\int_a^b f_n \to (R)\int_a^b f\,.$$

Aplikace: Stirling. (Můžete ji najít sepsanou na `http://140.113.2.129/course/fourier/supplement/Stirling.pdf`.)

(Začátek přednášky 2.12.)
Dokončení Stirlingova vzorce – zdůvodnění stejnoměrné konvergence apod.

Věta 3.5 (Diniho věta)**.** *Nechť (f_n) je monotónní posloupnost spojitých funkcí na kompaktním metrickém prostoru X. (Tj. pro každé $x \in X$ je posloupnost čísel $f_n(x)$ monotónní.) Nechť dále f_n bodově konveguje ke spojité funkci f.*
Pak f_n konveguje k f také stejnoměrně (na X).
(Bez důkazu.)

3.2 Stejnoměrná konvergence řad

Definice. *Mějme funkce $f_k : A \to \mathbb{R}$ a uvažme řadu funkcí $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Řekneme, že tato řada* konverguje stejnoměrně*, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně.*

Obdobně jako u číselných řad v prvním ročníku nebudeme řady funkcí a jejich stejnoměrnou konvergenci zkoumat přímo, ale prostřednictvím kritérií.

L Věta 3.6 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence)**.** *Uvažme funkce $f_k : A \to \mathbb{R}$, označme $M_k = \sup\{|f_k(x)| : x \in A\}$. Nechť řada funkcí $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně.*
Pak $\lim_{k\to\infty} M_k = 0$.

Důkaz. Podle BC podmínky pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ a $m = n + 1$ je $\|s_m - s_n\| < \varepsilon$. Ale $s_m - s_n = f_m$ takže $\|s_m - s_n\| = M_m$. Čili jsme podle definice ověřili, že $\lim_k M_k = 0$. □

L Věta 3.7 (Weierstrassovo kritérium, též Weierstrassův M-test)**.** *Uvažme funkce $f_k : A \to \mathbb{R}$, označme $M_k = \sup\{|f_k(x)| : x \in A\}$. Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$.*
Pak řada funkcí $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně.

Důkaz. (nástin důkazu) Také pomocí BC podmínky (Věta 3.3), ale tentokrát v opačném směru. Dále použijeme BC podmínku pro řady čísel (z prvního ročníku). □

Aplikace na mocninné řady.

T Věta 3.8 (Weierstrassova věta o stejnoměrné konvergenci derivací)**.** *Mějme funkce $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$. Nechť f_n' existuje vlastní na intervalu (a, b). Nechť dále existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ existuje vlastní. Konečně, nechť pro nějakou funkci $g : (a, b) \to \mathbb{R}$*

$$f_n' \rightrightarrows_{loc} g \qquad \text{na } (a, b)$$

Pak existuje funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, pro kterou $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b) a zároveň $f' = g$.

Defce lokálně stejnoměrná konvergence.

(Začátek přednášky 9.12.)

Věta 3.9 (Newtonův integrál ze stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí)**.** *Buďte f_n funkce definované na (a, b). Nechť $(N) \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ existuje pro všechna n a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} (N) \int_a^b f_n \to (N) \int_a^b f\,.$$

(Bez důkazu.)

T Věta 3.10 (Abelova věta)**.** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje ($b_n \in \mathbb{C}$). Pak*

$$\lim_{x\to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Poznámka. *Pokud řada $\sum_n b_n$ konverguje absolutně, je důkaz jednoduchý – neboť řada $\sum_n b_n x^n$ konverguje absolutně na intervalu $[0, 1]$. Pro obecný případ jsme použili Abelovu parciální sumaci.*

L Věta 3.11 (Spojitost mocninné řady v bodě na hranici kruhu konvergence)**.** *Uvažujme mocninnou řadu (pro $a_n \in \mathbb{C}$)*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Buď $w \neq z_0$ komplexní číslo pro něž mocninná řada $f(w)$ konverguje. Pak

$$\lim_{t \to 1_-} f(z_0 + t(w - z_0)) = f(w) .$$

(Neboli $f(z)$ je spojitá na úsečce z z_0 do w.)

Pro natrénování užití Abelovy parciální sumace můžete zkusit dokázat následující větu (kterou jsme ale z časových důvodů nedokazovali).

Věta 3.12 (Abel-Dirichletovo kritérium pro konvergenci číselných řad)**.** *Buď b_n monotónní omezená posloupnost reálných čísel. Pak řada $\sum_n a_n b_n$ konverguje, pokud je splněna jedna z následujících podmínek:*
(A) $\sum_n a_n$ je konvergentní nebo
(D) $\sum_n a_n$ má omezené částečné součty a $\lim_n b_n = 0$.
(Bez důkazu.)

(Pozor, existuje obdobná věta pro stejnoměrnou konvergenci řad, tu ale přeskakujeme úplně.)

4 Fourierovy řady

Motivace: chceme všechny funkce f vyjádřit v následujícím tvaru:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

jako tzv. Fourierovu řadu. To se hodí v mnoha situacích:

- analýza zvuku – rozklad na základní tón a "vyšší harmonické" (tóny s frekvencí, která je násobkem), základ mp3 formátu atd.
- analýza obrazu – tady možná není tak jasné proč, ale formát jpg je založen na dvojrozměrné analogii Fourierových řad (tj. sčítají se výrazy typu $\sin nx \sin my$, $\sin nx \cos my$, atd.).
- řešení diferenciálních rovnic – odsud pochází první aplikace (od pana Fouriera) na řešení rovnice pro vedení tepla: Mějme kovový čtverec $[0, \pi]^2$, přičemž jeho tři hrany udržujeme na teplotě 0, jeho horní stranu v bodě (x, π) udržujeme při teplotě $f(x) = \sin kx$. Pak v ustáleném stavu je teplota v bodě (x, y) rovna

  $$T(x, y) = \sin kx \frac{\sinh ky}{\sinh k\pi}$$

  (Něco z toho můžeme ověřit: snadno zjistíme, že hodnoty na okraji jsou ty předepsané. Dále můžeme dosadit do rovnice pro vedení tepla. Ta pro funkci $F(x, y, t)$ závisející i na čase t říká

  $$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = c \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Hodilo by se nám tedy (aby výše uvedená funkce $T(x, y)$ byla skutečně 'stabilní'), aby platilo $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, což se snadno spočítá, že je pravda. Co už nebudeme rozebírat je, proč je rovnice pro vedení tepla zrovna takováhle (to by patřilo spíš do fyziky), ani proč počáteční řešení konverguje k tomu 'stabilnímu' (to by vyžadovalo hlubší studium diferenciálních rovnic). Konec vsuvky.)

Označme tuto funkci T jako $T(f)$. Obdobný výsledek platí i pro cosiny. Pokud uvážíme $f(x)$, která je součtem několika funkcí tvaru $\sin kx$, tak získáme $T(x, y)$, která je součtem příslušných funkcí $T(\sin kx)$. Je tedy šikovné mít $f(x)$ vyjádřenou jako řadu (1), pak budeme umět najít stabilní rozložení teploty pro jakoukoli "okrajovou podmínku".)

- nečekané aplikace má Fourierova analýza v teoretické informatice, třeba při analýze Booleovských formulí. (Častěji se užívá Fourierova analýza na konečných grupách, tzv. DFT – discrete fourier transform.)

Vyjádření $f(x)$ ve tvaru (1) ale nemusí vždycky existovat! Především funkce na pravé straně jsou všechny 2π-periodické, musí tedy být 2π-periodická i levá strana, tj. funkce $f(x)$. Funkce na levé straně jsou také všechny spojité, ale součet spojitých funkcí může obecně být nespojitý (příklad?), proto
Fourierova řada je řada funkcí, tj. můžeme zkoumat buď bodovou, nebo stejnoměrnou konvergenci.

Pro lepší vhled do převodu funkce na vyjádření pomocí sinů a cosinů je užitečné se dívat na situaci očima lineární algebry (LA). Chápeme-li funkce jako vektory ve vhodném vektorovém prostoru, tak chceme vyjádřit daný vektor – funkci $f(x)$ – v bázi tvořené funkcemi $\sin nx$, $\cos nx$ pro všechna n. Rozdíl oproti běžné situaci v LA (ale i třeba v tzv. diskrétní Fourierově transformaci) je v tom, že zde potřebujeme nekonečné lineární kombinace.
Nicméně stejně jako normálně v LA se hodí zavést skalární součin. Ten definujeme pro funkce $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ takto:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

(Někdy se integrál ještě dělí vhodnou konstantou.)

L Věta 4.1 (ortogonalita sinů a cosinů).
- $\langle \sin nx, \cos mx \rangle = 0$
- $\langle \sin nx, \sin mx \rangle = 0$ *pro* $n \neq m$
- $\langle \cos nx, \cos mx \rangle = 0$ *pro* $n \neq m$
- $\langle \sin nx, \sin nx \rangle = \pi$ *pro* $n \neq 0$
- $\langle \cos nx, \cos nx \rangle = \pi$ *pro* $n \neq 0$
- $\langle \cos nx, \cos nx \rangle = 2\pi$ *pro* $n = 0$
- $\langle \sin nx, \sin nx \rangle = 0$ *pro* $n = 0$

(Začátek přednášky 16.12.)

Definice. *Uvažme funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je* po částech spojitá na *$[a, b]$, pokud existuje dělení $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tak, že*

- *f je spojitá na (x_i, x_{i+1}) pro $i = 0, \dots, n-1$*
- *existuje vlastní limita zprava $f(x_{i+})$ pro $i < n$*
- *existuje vlastní limita zleva $f(x_{i-})$ pro $i > 0$*

Analogicky řekneme, že f je po částech hladká na $[a, b]$, *pokud existuje dělení (jako výše), pro které*

- *f je spojitá a má vlastní derivaci na (x_i, x_{i+1}) pro $i = 0, \dots, n-1$*
- *existuje vlastní limita zprava funkce i její derivace tj. $f(x_{i+})$ a $f'(x_{i+})$ pro $i < n$*
- *existuje vlastní limita zleva funkce i její derivace tj. $f(x_{i-})$ a $f'(x_{i-})$ pro $i > 0$*

T Věta 4.2 (Riemann-Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá funkce. Pak*

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \sin tx \,\mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Napřed pro konstatní funkce. Pak pro schodovité funkce. Pak pro spojité. Nakonec pro po částech spojité. □

(Obr: "AM – amplitudová modulace") TODO: je to trochu slozitejsi

Poznámka. *Obecněji předchozí věta platí pro všechny funkce, pro které $\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$ je konečný – tzv. L_1 funkce.*

L Věta 4.3 (Součet konečné řady cosinů)**.**

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,.$$

Funkci na pravé straně nazýváme *Dirichletovo jádro* a značíme $D_n(t)$. Za chvíli uvidíme, že se k popisu Fourierových řad bude hodit.
Vztahy ve Větě 4.1 nám dávají tušit, jak by měly vypadat koeficienty v rozvoji (1). Budeme však muset ještě dost pracovat, abychom zjistili, zda takový rozvoj funguje (a kdy). Napřed k tomu musíme zavést vhodné značení.

Definice. *Fourierovými koeficienty pro 2π-periodickou funkci f nazýváme čísla a_k, b_k definovaná následovně:*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \,\mathrm{d}x b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x$$

Dále budeme zkoumat n-tý částečný součet řady (1) *s výše uvedenými koeficienty, označíme jej*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$

T Věta 4.4 (vyjádření částečného součtu Fourierovy řady pomocí Dirichletova jádra)**.** *Pro 2π-periodickou funkci f platí*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) \,\mathrm{d}t \qquad x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Jako okamžitý důsledek pro $f(x) = 1$ dostáváme následující větičku (tu můžeme také dokázat přímo, z vyjádření D_n jako součtu cosinů.

L Věta 4.5 (integrál z Dirichletova jádra)**.**

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Hlavní důsledek však je následující věta o chování Fourierovy řady.

T Věta 4.6 (Bodová konvergence Fouerierovy řady)**.** *Nechť f je 2π-periodická funkce, která je na $[-\pi,\pi]$ po částech hladká. Pak pro součet Fourierovy řady $F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ platí*

$$F(x) = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}\,.$$

Speciálně, je-li f spojitá v x, je $F(x) = f(x)$.

(Začátek přednášky 6.1.)
Dokončení důkazu předchozí věty.
Jako důsledky věty o bodové konvergenci Fourierovy řady dostaneme následující tvrzení o stejnoměrné konvergenci.

L Věta 4.7 (stejnoměrná konvergence Fourierovy řady)**.** *Nechť f je 2π-periodická funkce, která je na $[-\pi,\pi]$ po částech hladká. Nechť Fourierovy koeficienty pro f jsou a_n, b_n a platí $\sum_n |a_n| < \infty$ a $\sum_n |b_n| < \infty$. Pak funkce $f(x)$ je spojitá a je stejnoměrnou limitou sve Fourierovy řady:*

$$s_n(x) \rightrightarrows f(x)\,.$$

Důkaz. (nástin důkazu) Podle Weierstrassova kritéria je Fourierova řada stejnoměrně konvergentní. Její součet, $F(x)$, musí proto být dle Cauchyho věty spojitá funkce. to, spolu s Větou 4.6, dává spojitost funkce $f(x)$, ze které plyne, že $F(x) = f(x)$. □

Příklad. *O řadě $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ víme již z prvního ročníku, že má konečný součet – ale jaký? To byla otevřená otázka od roku 1644 do 1735, kdy ji vyřešil Leonhard Euler (v Basileji – i proto se této úloze říká Basilejský problém).*
Problém vyřešíme tím, že najdeme Fourierovu řadu pro funkci x^2 (na intervalu $[\pi,\pi]$) a pak dosadíme $x = \pi$.

5 Metrické prostory

Opakování z letního semestru: metrický prostor (X,ϱ) se skládá z množiny bodů X a *metriky* ϱ, která splňuje několik axiomů (připomeňte si je). Pomocí metriky se definuje otevřená koule, otevřená a uzavřená množina, konvergence posloupnosti (dvěma způsoby) a kompaktnost. Hlavní věta v této oblasti: spojitá funkce na kompaktní množině nabývá maxima a minima.
Nyní využijeme kompaktnost k důkazu tvrzení, kterému se obvykle říká základní věta algebry: to proto, že je to věta, o které se v algebře hovoří (jejím jazykem se dá přeformulovat tak, že komplexní čísla tvoří algebraicky uzavřené těleso – tj. těleso, kde lze řešit algebraické rovnice). K jejímu důkazu však potřebujeme analýzu.

T Věta 5.1 (základní věta algebry)**.** *Buď $p(z)$ nekonstantní polynom s komplexními koeficienty. Pak existuje komplexní z_0, pro které $p(z_0) = 0$.*

Důkaz. (nástin důkazu) Napřed ukážeme, že spojitá funkce $|p(z)|$ má na $\mathbb{C}$ lokální minimum. (K tomu použijeme toho, že je-li $|z|$ velká, tak je též $|p(z)|$ velká, a dále kompaktnost omezených uzavřených množin v $\mathbb{R}^2$, resp. v $\mathbb{C}$.) Dále ukážeme, že pokud $p(z_0) \neq 0$, tak v bodě z_0 funkce $|p(z)|$ lokální minimum nemá. (K tomu stačí se pozorně podívat na chování komplexního polynomu okolo bodu z_0.) □

(Začátek přednášky 13.1.)
(napřed jsme dokončili důkaz základní věty algebry)
Poté co jsme viděli aplikaci kompaktnosti "přímo", resp. prostřednictvím věty z minulého semestru, ukážeme si nový pohled na kompaktnost.

Věta 5.2 (Ekvivalentní definice kompaktnosti)**.** *Buď (X, ϱ) metrický prostor, $A \subseteq X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *A je kompaktní*
- *Pro každé otevřené pokrytí množiny A existuje konečné podpokrytí. Podrobněji: uvažme libovolný systém $(G_\alpha)_{\alpha \in S}$ pro nějž každá množina G_α je otevřená množina v prostoru (X, ϱ) (tedy* otevřené *pokrytí) a navíc $\cup_{\alpha \in S} G_\alpha \supseteq A$. Pak existuje konečná množina $S' \subseteq S$ tak, že $\cup_{\alpha \in S'} G_\alpha \supseteq A$.*

(Bez důkazu.)

Tuto větu nebudeme dokazovat (pro spočetnou množinu S by důkaz nebyl tak těžký, ale pro aplikace se hodí povolit i nespočetné systémy). Dokažme však ekvivalenci pro nejjednodušší netriviální případ kompaktní množiny – uzavřený interval. O tom víme (už ze zimního semestru), že splňuje první podmínku Věty 5.2 (Weierstrassova věta). Ukažme nyní, že splňuje i druhou podmínku.

T Věta 5.3 (Konečné podpokrytí uzavřeného intervalu)**.** *Pro každé otevřené pokrytí uzavřeného intervalu existuje konečné podpokrytí.*

Důkaz. (nástin důkazu) Uvažme pevné otevřené pokrytí $(G_\alpha)_{\alpha \in S}$ intervalu (búno) $[0, 1]$. Nazvěme interval $I \subseteq [0, 1]$ *ošklivý*, pokud neexistuje konečný systém $(G_\alpha)_{\alpha \in S'}$ (pro konečnou $S' \subseteq S$) pokrývající I. Není těžké si rozmyslet, že když $I = I_1 \cup I_2$ a I je ošklivý, tak alespoň jeden z I_1, I_2 je ošklivý.
Cílem je ukázat, že $[0, 1]$ není ošklivý. Pro spor, nechť je. Pak jeho levá nebo pravá polovina je taká ošklivá. Tuto úvahu nekonečněkrát zopakujeme a dostaneme posloupnost do sebe zanořených (uzavřených) ošklivých intervalů $[0, 1] = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots$, přičemž délka J_n je 2^{-n}. Označme a limitu levých konců těchto intervalů. (Limita existuje, protože tyto levé konce jsou neklesající shora omezená posloupnost.) Bod a je pokryt některou (otevřenou) množinou G_{α_0}, proto existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq G_{\alpha_0}$.
Nyní už snadno nahlédneme, že pro dost velké n bude celý interval J_n pokryt G_{α_0}, takže není ošklivý – spor! □

Nyní si tento pohled na kompaktnost vyzkoušíme použít – na větu, kterou jsme používali už v letním semestru, při důkazu toho, že spojité funkce mají Riemannův integrál.

T Věta 5.4 (vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti na kompaktu)**.** *Buď (X, ϱ) kompaktní metrický prostor, (Y, σ) libovolný metrický prostor. Buď $f : (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ spojité zobrazení. Pak f je také stejnoměrné spojité.*

Důkaz. (nástin důkazu) Buď $\varepsilon > 0$ pevné. Dle spojitosti pro každé $x \in X$ existuje $\delta_x > 0$ tak, že pro všechna $y \in B(x, \delta_x)$ platí, že $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. Označme nyní $B_x = B(x, \delta_x/2)$. Z otevřeného pokrytí $(B_x)_{x \in X}$ vybereme konečné podpokrytí $(B_{x_i})i = 1^n$. Označme nyní $\delta = \min\{\delta_{x_i}\}/2$. Nyní zbývá ověřit, že takto zvolené δ bude fungovat v definici stejnoměrné spojitosti. □

Další témata jsou zmíněna už jen orientačně – na přednášce na ně nezbylo dost času. Nebudou se tedy zkoušet.

Topologický prostor: Dvojice $(X, \mathcal{G})$, kde X je množina bodů a $\mathcal{G}$ množina všech otevřených množin. (Ty ale nejsou definovány žádnou metrikou, ale právě jen tím, že jsou v $\mathcal{G}$.) Musí být splněny axiomy (okoukané z metrických prostorů):

- $\emptyset, X \in \mathcal{G}$
- Pokud $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$ pak také $\cap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{G}$.
- Pokud $G_\alpha \in \mathcal{G}$ pro všechna $\alpha \in S$ (kde S může být i nekonečná), pak také $\cup_{\alpha \in S} G_\alpha \in \mathcal{G}$.

Úplný metrický prostor. Posloupnost bodů (x_n) v metrickém prostoru (X, ϱ) nazveme *cauchyovskou*, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n > n_0)\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Metrický prostor (X, ϱ) nazveme *úplný*, pokud každá Cauchyovská posloupnost má limitu.
Příklady: $\mathbb{R}$ (s eukleidovskou metrikou) je úplný metrický prostor (BC podmínka pro konvergenci posloupností), taktéž i $\mathbb{R}^n$. I $C[a, b]$ je úplný (BC podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí spolu s Cauchyho větou (Věta 3.2).