

1. zkoušková písemka MA3 – NMAI056 – 19.1.2012

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje jméno.

1. (14 bodů) Určete těžiště horní poloviny kruhu o poloměru 1, tj. množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0\}.$$

Návod: x -ová souřadnice těžiště množiny M je rovna

$$\frac{\int_M x}{\int_M 1}$$

2. (18 bodů) Položme

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot \log k \cdot k^x}.$$

Dokažte, že funkce f je dobře definována na intervalu $(-1, \infty)$.

Rozhodněte, zda se jedná o spojitou funkci. (Zkuste využít stejnoměrnou konvergenci.)

Spočtěte $f'(0)$.

3. (18 bodů) Rozviňte funkci

$$g(x) = \cos^2 x + |x - \pi/4|$$

ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$ a určete její součet všude, kde řada konverguje.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Na vypracování máte 120 minut.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je (137 · 173 je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701).

Můžete využívat jeden tahák o formátu A4.