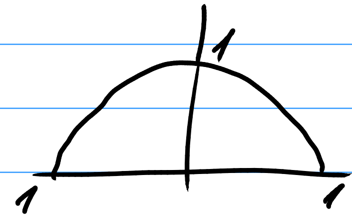
Řešení zk. pís. A – MA3

① **Těžiště půlkruhu**



x-ová souř. je 0 ze symetrie

příp. můžeme i podle vzorce:

$$\int_\Omega x = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx\right)}_{=0 \text{ pro l.b. } y} dy \qquad \left(= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-r}^{r} = \frac{r^2}{2} - \frac{(-r)^2}{2} = 0 \right)$$

y-ová souř. je $\dfrac{\int_\Omega y}{\int_\Omega 1} = \dfrac{A}{B}$

$$A = \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{2} = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

$B = \frac{\pi}{2}$ (polovina obs. kruhu)

(nebo %)

Závěr: těžiště má souř. $\left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$

Pozn. 1) A šlo počítat i v opačném pořadí, s maličko ošklivějším integrálem.

2) Pro připomenutí:

$$B = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt$$

subst. $x = \sin t$

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$dx = \cos t \, dt$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

② $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot \log k \cdot k^x}$

a) D_f : všechny sčítance jsou dobře def. $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \geq 2$

musíme ověřit, kdy vyjde $f(x) \in \mathbb{R}$ (a ne ∞)

z MA1 si pamatujeme, že

$$\sum \frac{1}{k^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1$$

$$\sum \frac{1}{k \log k} = \infty$$

Odsud srovnávacím kritériem:

$x > -1 \Rightarrow \frac{1}{k^2 \log k \, k^x} < \frac{1}{k^{2+x}}$ & $2+x > 1$ .. konv.

$x \leq -1 \Rightarrow \frac{1}{k^2 \log k \, k^x} \geq \frac{1}{k \log k} \Rightarrow$ div. (tohle nebylo potřeba)

---

b) $f(x)$ je na $(-1, \infty)$ spojitá. Ověříme spojitost v $x_0 > -1$. Zvolme $t \in (-1, x_0)$. Ukážeme, že na intervalu

$[t, \infty)$ $\quad \sum \frac{1}{k^2 \log k \, k^x} \rightrightarrows f(x)$, a protože

$\frac{1}{k^2 \lg k\, k^x}$ je tk spoj. funkce (a tedy i částečné součty jsou spoj.) tak z Cauchyovy věty je $f(x)$ spoj. na $[t, \infty)$, tedy i v x_0.

Zbývá ověřit stejn. konvergenci. Užijeme Weierstrass. krit.:

$$M_k = \left\| \frac{1}{k^2 \lg k\, k^x} \right\|_{\sup} = \frac{1}{k^2 \lg k\, k^t} \leq \frac{1}{k^{2-t}}, \qquad 2-t > 1$$

(k^{-x} je kles. fce)

$$\Downarrow$$

$\sum M_k < \infty$ a řada konv. stejn. na $[t, \infty)$

c) Derivováním člen po členu to vypadá, že

$$f'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \lg k} \left(k^{-x}\right)' = \sum \frac{\cancel{\lg k} \cdot k^{-x} \cdot (-1)}{k^2 \cancel{\lg k}}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k^{2+x}}$$

$$f'(0) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-1}{k^2} = -\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) + 1 = 1 - \frac{\pi^2}{6}$$

Pro ověření, že takto lze derivaci provést

užijeme Weierstrassovu větu:

1) $\sum \frac{1}{k \log^2 k^x}$ konverguje pro nějaké $x \in (-1, \infty)$

(víme, že konv. dokonce pro všechny)

2) $\sum \frac{-1}{k^{2+x}}$ konverguje lok. stejn. na $(-1, \infty)$

... obdobně jako v části b: $\forall t > -1$ ověříme st. konv.

na $[t, \infty)$ pomocí Weierstrassova krit.;

$M_k = \frac{1}{k^{2+t}}$ a $\sum M_k < \infty$.

(3) $g(x) = \cos^2 x + |x - \pi/4|$ na $(-\pi, \pi)$

Označme $g_1(x)$ 2π-periodické rozšíření g na $\mathbb{R}$,

v bodě nespojitosti $x = \pi$ definujeme g_1 tak, aby

$$g_1(\pi) = \frac{g_1(\pi_-) + g_1(\pi_+)}{2} = \frac{\left(1 + |\pi - \frac{\pi}{4}|\right) + \left(1 + |-\pi - \frac{\pi}{4}|\right)}{2}$$

$$= \underline{1 + \pi}$$

Začneme „od konce" až spočteme koef. a_k, b_k,

tak dle Four. věty (g_1 je po částech spoj.,

po č. hladká na $[-\pi, \pi]$) tak dle Fourierovy věty

$$\frac{a_0}{2} + \sum \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

konverguje ke $\dfrac{g_1(x_-) + g_1(x_+)}{2} = g_1(x)$ (protože jsme

definovali $g_1(\pi)$ tak chytře).

Počítejme tedy Fourier. koeficienty.

Budeme zvlášť zkoumat $\cos^2 x$ a $|x - \frac{\pi}{4}|$,

výsledek bude součet.

Podle součtového vzorce je $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$,

čímž máme FŘ pro $\cos^2 x$.

Fce $|x - \frac{\pi}{4}|$ dá více práce.

Označme $F_k(x) = \int (x - \frac{\pi}{4}) \cos kx$

$G_k(x) = \int (x - \frac{\pi}{4}) \sin kx$ (spočteme později)

Pak

$$a_k \left(\text{pro } |x - \tfrac{\pi}{4}|\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x - \tfrac{\pi}{4}| \cos kx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi/4} -(x - \tfrac{\pi}{4}) \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{4}) \cos kx$$

$$= \left[-\left(F_k(\pi/4) - F_k(-\pi)\right) + \left(F_k(\pi) - F_k(\tfrac{\pi}{4})\right) \right] / \pi$$

$$= \left[F_k(\pi) + F_k(-\pi) - 2F_k(\pi/4) \right] / \pi$$

obdobně

$$b_k = \left[G_k(\pi) + G_k(-\pi) - 2G_k(\pi/4) \right] / \pi$$

$$F_k(x) = \int \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos kx = \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sin kx}{k} - \int 1\cdot\frac{\sin kx}{k}$$

$$\quad f \quad g' \qquad\qquad f \quad g \qquad\qquad f'g$$

$$= \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \qquad (+C) \text{ zvolíme } C=0$$

$$G_k(x) = \int \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin kx = -\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\cos kx}{k} + \int 1\cdot\frac{\cos kx}{k}$$

$$= -\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}$$

Dosadíme

$$a_k = \left(F_k(\pi) + F_k(-\pi) - 2F_k(\pi/4)\right)/\pi$$

$$= \frac{2\cos(k\pi)}{\pi k^2} - \frac{2\cos(k\pi/4)}{\pi k^2}$$

(můžeme by[l]i ještě dosadit

$\cos k\pi = (-1)^k$

$\cos k\pi/4 = 0, \pm 1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(podle $k \bmod 4$)))

$$b_k = \left(G_k(\pi) + G_k(-\pi) - 2G_k(\pi/4)\right)/\pi$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\pi\frac{\cos k\pi}{k} + \frac{5}{4}\pi\frac{\cos k\pi}{k} - 2\frac{\sin k\pi/4}{k^2}\right)/\pi$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\cos k\pi}{k} - \frac{2\sin(k\pi/4)}{\pi k^2}$$

Four. koef. pro $g(x)$ se liší o $\cos^2 x$,

tj. a_0, a_2 jsou o $\frac{1}{2}$ vyšší.