9. cvičení z MA3 – 6.12.2011

Bodová, stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence řad

Uvažme řadu $\sum_n f_n$ funkcí na nějaké množině A. Weierstrassovo kritérium dává postačující podmínku pro stejnoměrnou konvergenci: tato řada konverguje, pokud konverguje součet norem, tj. $\sum_n \|f_n\|_A$, kde $\|f_n\|_A = \sup_{x\in A} f_n(x)$.
Nutnou podmínku pro konvergenci dostaneme jako snadný důsledek Bolzano-Cauchyovy podmínky. Pokud uvedená řada konverguje stejnoměrně, tak $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_A = 0$.

1.
(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx}{1+k^5x^2}$
(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)$
(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+2^k}$
(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+k^3}$
(e) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{3^k x}$
(f) * $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$

2. Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$, jestliže (a) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, (b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, (c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$? Jak je to se stejnoměrnou konvergencí f_n na $(0,1)$?

3. Dokažte, že funkce $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ má na intervalu $(1,\infty)$ derivace všech řádů.

4. Nechť $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^p+x^2k^q}$, kde $p,q \geq 0$. Dokažte, že
(a) f je spojitá na $(0,\infty)$, pokud $\max(p,q) > 1$,
(b) f je spojitá na $\mathbb{R}$, pokud $p+q > 2$.
(c) Vyšetřete definiční obor a spojitost f v závislosti na p,q.

5. V kterých bodech má derivaci funkce (a) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$ (b) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|}{k^2+x^2}$

6. Dokažte, že $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ má spojitou derivaci na $\mathbb{R}$.

7. Spočtěte limity:
(a) $\lim_{x\to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \frac{x^k}{x^k+1}$
(b) $\lim_{x\to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k+1})$
(c) $\lim_{x\to 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^x}$