

## 8. cvičení z MA3 – 22.11.2011

### Reálné integrály pomocí komplexních

Převeďte na komplexní integrál a ten spočtěte pomocí Cauchyho věty.

1.

(a)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}$  (pro  $a > 1$ ),

(b)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2}$  (pro  $a > 1$ ),

(c)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\sin^2 x}$  (pro  $a, b > 0$ ),

Návod: hledaný integrál je (podle definice) roven integrálu  $\int_{\varphi} f(z) dz$  pro vhodnou funkci  $f$  a křivku  $\varphi$  – jednotkovou kružnici. Připomeňte si vzorce  $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ ,  $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$ .

2.

(a)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$  (tady lze přímo najít primitivní funkci, ale zkuste jinak!)

(b)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$  (i tady lze najít primitivní funkci, ale už hůře, tak to raději nezkoušejte :-))

Návod: napřed převeďte na integrál od  $-\infty$  do  $\infty$ , který pro dostatečně velké  $R$  je blízký integrálu  $\int_{-R}^R$ . Ten pak doplňte kružnicí na uzavřenou křivku a použijte Cauchyho větu.