7. cvičení z MA3 – 15.11.2011

Komplexní integrály

1. S využitím Cauchyovy věty, znalosti primitivních funkcí a definice spočtěte $\int_\varphi f$, pokud:
(a) $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu
(a1) -1, (a2) 0, (a3) 1, (a4) 2;
(b) $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu
(b1) -1, (b2) 0, (b3) 1, (b4) 2;
(c) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^3}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu
(c1) -1, (c2) $\frac{1}{2}$, (c3) 2;
(d) $f(z) = \frac{z}{z^4-1}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru r a středu r ($r > 0$).

Stejnoměrná konvergence

Řekneme, že posloupnost funkcí f_n *konverguje stejnoměrně* k funkci f na intervalu I pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(\forall x \in I) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Dále řekneme, že posloupnost funkcí f_n *konverguje lokálně stejnoměrně* k funkci f na intervalu I pokud pro každé $x \in I$ existuje $\delta > 0$ tak, že f_n konverguje stejnoměrně k f na $I \cap U(x, \delta)$.
Zjistěte, zda následující posloupnosti konvergují bodově, stejnoměrně, či lokálně stejnoměrně.

2. x^n, $x \in [0, 1]$,

3. $x^{n+1} - x^{n-1}$, $x \in [0, 1]$,

4. $x^n - x^{3n}$, $x \in [0, 1]$

5. $\frac{1}{x+n}$
(a) $x \in (0, +\infty)$,
(b) $x \in \mathbf{R}$

6. $\frac{nx}{1+n+x}$, $x \in [0, 1]$

7. $\frac{x^n}{1+x^n}$ pro
(a) $x \in [0, 1-\varepsilon]$,
(b) $x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$,
(c) $x \in [1+\varepsilon, +\infty)$, kde $\varepsilon \in (0, 1)$.

8. $\frac{2nx}{1+n^2x^2}$
(a) $x \in [0, 1]$,
(b) $x \in (1, +\infty)$.

9. $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbf{R}$

10. $\frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbf{R}$,

11. $\sin \frac{x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$.

12. $n \cdot \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, $x \in [0, \infty)$

13. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M a $g_n \rightrightarrows g$ na M. Platí následující tvrzení?
(a) $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M;
(b) $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$ na M;
(c) $\frac{f_n}{g_n} \rightrightarrows \frac{f}{g}$ na M?