2. cvičení z MA3 – 11.10.2011

Vícerozměrné integrály – Substituce

Buď $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ libovolné zobrazení. Řekneme, že φ je *regulární*, pokud

- $\varphi \in C^1(U)$ (tj. existují všechny parciální derivace a jsou spojité)
- φ je prosté
- matice $D\varphi(u)$ má plnou hodnost pro všechna $u \in U$.

Hodnotu $\mathcal{J}\varphi(u) = \det D\varphi(u)$ nazveme *Jakobiánem* zobrazení φ v bodě u.
Platí věta o substituci: Buď $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omezená, její hranice ∂A buď nulová a $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ buď regulární na vnitřku A. Pak pro funkci $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_A (f \circ \varphi)|\mathcal{J}\varphi| = \int_{\varphi(A)} f\,.$$

1. Zamyslete se i nad geometrickým či fyzikálním smyslem výsledku
(a) $\int_\omega 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = \{[x,y] : x^2 + y^2 \le a^2\}$, pro $a > 0$.
(b) $\int_\omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = \{[x,y] : x^2 + y^2 \le a^2\}$, pro $a > 0$.
(c) $\int_\omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = \{[x,y] : x^2 - 2cx + y^2 \le 0\}$, pro $c > 0$.
(d) $\int_\omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = \{[x,y] : x^2 + y^2 \le 1, \quad x \ge 0\}$, pro $a > 0$.
(e) $\int_\omega \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde $\omega = \{[x,y] : x^2 + y^2 \le ax\}$, pro $a > 0$.

2. Vypočítejte objem tělesa
(a) koule o poloměru R
(b) ohraničeného plochami $z = 0$ a $x^2 + y^2 + z = 4$
(c) ohraničeného plochami $z = x^2 + y^2$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Počítání s komplexními čísly

3. Najděte reálnou a imaginární část čísel (a) $\frac{1}{i}$, (b) $\frac{1-i}{1+i}$, (c) $\frac{2}{1-5i}$, (d) $(1 + i\sqrt{2})^3$.

4. Zapište následující čísla v goniometrickém tvaru (a) $3i$, (b) -5, (c) $1 + i$, (d) $-3 - 3i$.

5. Najděte všechny hodnoty komplexních odmocnin, tj. všechna řešení rovnice $z^n = a$ (a) $\sqrt[3]{1}$, (b) $\sqrt[3]{i}$, (c) $\sqrt[4]{-i}$, (d) $\sqrt{1-i}$.

6. Načrtněte množinu všech bodů v komplexní rovině splňující vztahy (a) $\Re z \ge 3$, (b) $\Im z < 0$, (c) $|\Re z| < 2$, (d) $|z - 1| \le 1$, (e) $1 < |z| \le 2$, (f) $|z - 2| + |z + 2| = 5$, (g) $|\Re z| + |\Im z| \le 1$.