10. cvičení z MA3 – 20.12.2011

Fourierovy řady

Jak je definovaná Fourierova řada k dané funkci f? Co o jejích členech říká Riemann-Lebesgueovo lemma? Co víte o bodové/stejnoměrné konvergenci Fourierových řad? Kdy jde derivovat Fourierovy řady člen po členu? (Odpovědi dole.)

1. Rozviňte následující funkce ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$ a určete součet všude, kde řada konverguje.
(a) $\sin^2 x$,
(b) $\cos^3 x$,
(c) $\cos^{2m} x$,
(d) $\frac{\sin mx}{\sin x}$,
(e) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha^m \frac{\sin mx}{\sin x}$, kde $|\alpha| < 1$.
(f) $\frac{1}{\sin x}$.

2. Pro následující funkce najděte trigonometrickou řadu, jejímž jsou součtem (a výsledek aplikujte v uvedených bodech).
(a) x^2 na $(-\pi, \pi)$, $x = 0$;
(b) x^2 na $(0, 2\pi)$, $x = 0$;
(c) $x^2 - x$ na $(-\pi, \pi)$;
(d) $x^2 + \sin^4 x$ na $(0, 2\pi)$.
(e) x na $(-\pi, \pi)$, $x = \frac{\pi}{2}$;
(f) $\sin ax$ na $(-\pi, \pi)$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3.
(a) Napište funkci $f(x) = x$ na $(0, \pi)$ jako součet cosinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech?
(b) Napište funkci $f(x) = x^2$ na $(-\pi, 0)$ jako součet sinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech?
(c) Napište funkci $f(x) = \sin x$ na $(0, \pi)$ jako součet cosinové řady. Jaký je součet řady v ostatních bodech?

Pro Fourierovy koeficienty k po částech spojité funkci platí, že $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Pro po částech hladkou funkci f konverguje Fourierova řada bodově – v bodě x – k hodnotě $(f(x_-) + f(x_+))/2$, tj. pro spojitou funkci k $f(x)$. Pokud $\sum_n a_n$, i $\sum_n b_n$ konvergují absolutně, tak je tato konvergence stejnoměrná a (tudíž) je f spojitá funkce. Pokud $\sum_n na_n$, i $\sum_n nb_n$ konvergují absolutně, tak lze tuto řadu derivovat člen po členu.