Kombinatorické etudy 4 – LS 2010/2011

1. (2.21) Buď $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ množina s částečným uspořádáním $\leq$. Matici A nazveme kompatibilní, pokud

$$A_{i,j} \neq 0 \Rightarrow x_i \leq x_j \,.$$

Ukažte, že součet, součin a (existuje-li) inverze z kompatibilních matic je kompatibilní.

2. (5.10+11) Buď G souvislý digraf, v němž každý vrchol má stejný vstupní i výstupní stupeň. Buď T kostra s kořenem x_0, jejíž všechny hrany jsou orientovány směrem k x_0. Začneme v x_0 a budeme G procházet následovně:

- Z každého vrcholu x jdeme po nějaké hraně, kterou jsme ještě nepoužili.
- Hrany T použijeme jen tehdy, když nemáme jinou volbu.

Ukažte, že se zasekneme v x_0 a to až v momentě, kdy jsme prošli nějaký Eulerovský tah.

Co odsud plyne pro počet Eulerovských tahů v G?

3. (9.6) Ukažte, že barevnost grafu G je rovna nejmenšímu číslu k takovému, že $\alpha(K_k \,\square\, G) = |V(G)|$.

4. (11.8) Buď G graf, jehož grupa automorfismů obsahuje regulární komutativní podgrupu Γ. (Regulární znamená, že pro každé $u, v \in V(G)$ existuje *právě jedno* $\gamma \in \Gamma$, že $\gamma(u) = v$, označme ho $\gamma_{u,v}$. Speciálně tedy G je tranzitivní.) Buď χ *charakter grupy* Γ (neboli homomorfismus do komplexních čísel s násobením). Buď v_0 jeden z vrcholů G. Ukažte, že

$$\sum_{v : v_0 v \in E(G)} \chi(\gamma_{v_0,v})$$

je vlastní číslo G.

5. (12.3) Zkonstruujte graf, jehož grupa automorfismů je Z_k (cyklická grupa řádu n).

6. (15.3) Nechť $0 \leq i < r$. Vytvořme graf $L_i(K_n^r)$ jehož vrcholy jsou r-tice z n prvků (čili hyperhrany hypergrafu K_n^r), a dvě r-tice A, B sousedí, právě když $|A \cap B| = i$. Ukažte, že pro dostatečně velké n je každý automorfismus $L_i(K_n^r)$ určen permutací $V(K_n^r)$.