Kombinatorické etudy 12 – LS 2010/2011

1. (2.26 – zbylo zminula) Ukažte, že princip inkluze a exkluze je speciální případ Moebiovy inverzní formule.

2. (5.19 – zbylo zminula) Nechť G je prostý digraf (bez násobných hran a bez smyček), označme $h(G)$ počet Hamiltonovských cest v G. Ukažte, že $h(G) \equiv h(\bar{G}) \pmod 2$. Je tvrzení pravdivé pro neorientované grafy?

3. (9.12) Pro každý vrchol v grafu G mějme množinu C_v barev. Budeme hledat obarvení, kde vrchol v má barvu z množiny C_v.

(a) Nechť pro všechny vrcholy v platí $|C_v| \geq \deg(v)$ a alespoň pro jeden vrchol je tato nerovnost ostrá. Navíc G je souvislý. Pak lze graf obarvit podle podmínek.

(b) Tentokrát pro všechny vrcholy v platí $|C_v| = \deg(v)$, G je 2-souvislý a pro nějaké vrcholy u, v platí $C_u \neq C_v$. Pak lze graf obarvit podle podmínek.

4. (11.13) Buďte Λ, Λ' největší vlastní čísla grafů G, G'. Pokud G' je podgraf G, tak $\Lambda' \leq \Lambda$.

5. (12.7 – zbylo z minula) (a) Každý turnaj má lichý počet automorfismů.

(b)* Každá grupa lichého řádu n je grupa automorfismů nějakého turnaje s $2n$ vrcholy.

6. (15.12) (a) Buď $n = 2^k$. Sestavte dvě multimnožiny (prvky se mohou opakovat) celých čísel $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $\{b_1, \ldots, b_n\}$ tak, aby multimnožiny $\{a_i + a_j : 1 \leq i < j \leq n\}$ a $\{b_i + b_j : 1 \leq i < j \leq n\}$ byly stejné.

(b) Když n není mocnina dvou, tak to nejde, tj. v takovém případě lze $\{a_i\}$ zrekonstruovat z multimnožiny $\{a_i + a_j\}$.