Kombinatorické etudy 10 – LS 2010/2011

1. (2.25) Buďte M a Z čtvercové matice přiřazené uspořádané množině tak, že $Z_{i,j} = [x_i \leq x_j]$ (kde $[V]$ je 1 když V platí, a 0 když neplatí) a $M_{i,j} = \mu(x_i, x_j)$. V předminulé úloze jsme si všimli, že $M = Z^{-1}$. Vyjádřete M jako polynom v Z.

2. (5.18 – zbylo z minula) (a) V grafu G označme $m_i(G)$ počet jeho párování s i hranami. Vyjádřete $m_1(G), m_2(G), \ldots$ pomocí $n = |V(G)|$ a $m_1(\bar{G}), m_2(\bar{G}), \ldots$. ($\bar{G}$ je doplněk G)

(b) Pokud $|V(G)|$ je sudé a $\bar{G}$ má lichý počet párování, tak G má perfektní párování.

(c) G má sudý počet perfektních párování právě tehdy, když existuje neprázdná množina $S \subseteq V(G)$ taková, že každý vrchol G má sudý počet sousedů v S.

3. (9.10) Kdy je možno obarvit vrcholy digrafu G libovolným počtem barev $1, 2, \ldots$ tak, že každá hrana vede z vrcholu barvy i do vrcholu barvy $i + 1$?

4. (11.11) Když bipartitní graf nemá perfektní párování, tak má vlastní číslo 0.

5. (12.7) (a) Každý turnaj má lichý počet automorfismů.

(b)* Každá grupa lichého řádu n je grupa automorfismů nějakého turnaje s $2n$ vrcholy.

6. (15.10) Buďte T, T' dva stromy se stejnou množinou listů a stejnou metrikou na nich. (Tj. listy obou stromů jsou $\{x_1, \ldots, x_r\}$ a vzdálenost mezi libovolnými dvěma x_i, x_j je stejná v T i v T'.) Dokažte, že T a T' jsou isomorfní. (Neboli: strom lze zrekonstruovat z metriky z metriky na listech nejvýše jedním způsobem.)