Kombinatorické etudy 8 – ZS 2010/2011

1. (3.25) Buď Γ permutační grupa působící na množině Ω. Nechť každý $x \in \Omega$ má přiřazenu váhu $w(x)$, která je invariantní vzhledem ke Γ (čili pro každou orbitu O mají všechny $x \in O$ váhu $w(x) = w(O)$). Ukažte, že

$$\sum_O w(O) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \sum_{x : \pi(x) = x} w(x) \,.$$

2. (6.16) Pokud průnik podstromů nějakého stromu je neprázdný, pak tento průnik je strom.

3. (7.13) Určete nejmenší číslo $r = r(n)$ takové, že každý r-regulární bipartitní graf s $2n$ vrcholy má 1-faktor M takový, že každá hrana z M má v G hranu paralelní.

4. (11.5) Buď P_n cesta s n vrcholy. Ukažte, že charakteristický polynom P_n může být napsán v libovolném z následujících tvarů:

$$p_{P_n} = \lambda^n - \binom{n-1}{1}\lambda^{n-2} + \binom{n-2}{2}\lambda^{n-4} - \binom{n-3}{3}\lambda^{n-6} + \cdots$$

$$p_{P_n} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}} \left(\left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2-4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-4}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Určete vlastní hodnoty P_n.

5. (13.7* – zbylo z minula) Buďte H_1, H_2 hypergrafy se stejnou množinou vrcholů a stejným počtem hran, m. Ukažte, že H_1 a H_2 mají společný SRR právě tehdy, když

$$|V(H') \cap V(H'')| \geq |E(H')| + |E(H'')| - m$$

pro každé dva podhypergrafy $H' \subseteq H_1$, $H'' \subseteq H_2$.

6. (14.5* – zbylo z minula) Obarvíme dvěma barvami hrany K_n kde $n = \lfloor \frac{3k+1}{2} \rfloor$. Dokažte, že existuje jednobarevná cesta délky k.