Kombinatorické etudy 3 – ZS 2010/2011

1. (3.22) (ponecháno z minula)

(a) Buďte $x_1, \dots, x_n$ reálná čísla. Pro každou permutaci π množiny $\{1, \dots, n\}$ definujme

$$a(\pi) = \max\{0, x_{\pi(1)}, x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)} + \cdots + x_{\pi(n)}\}\,.$$

Uvažme cykly $C_1, \dots, C_k$ permutace π a položme

$$b(\pi) = \sum_{l=1}^{k} \max\bigl(0, \sum_{j \in C_l} x_j\bigr)$$

Ukažte, že $\{a(\varrho) \mid \varrho \in S_n\}$ a $\{b(\pi) \mid \pi \in S_n\}$ jsou stejné (jako multimnožiny).

(b) m chlapců a m dívek při tanci vytvoří náhodné kruhy (v jednom kruhu může být libovolný počet tanečníků(-ic), i dva či dokonce jen jeden). Dokažte, že pravděpodobnost, že v každém kruhu je stejný počet chlapců a dívek, je přesně $\frac{1}{m+1}$.

2. (6.11) V tomto příkladu souvislý = silně souvislý.

(a) Pokud lze souvislý digraf G učinit nesouvislým odstraněním $\le k$ hran, lze jej také učinit nesouvislým otočením $\le k$ hran.

(b) Buď G digraf bez mostů, který je možno učinit souvislým kontrakcí $\le k$ hran. Pak jej lze také učinit souvislým otočením $\le k$ hran.

(c) (Nechť G nemá smyčky.) Pokud lze zničit všechny cykly v G odstraněním $\le k$ hran, lze je také zničit otočením $\le k$ hran.

3. (7.9) Buď $G \ne K_2$ bipartitní graf, který je "kriticky elementární" – tj. je elementární, ale po odstranění libovolné hrany takový být přestane. Ukažte, že G má vrchol stupně 2. Musí každá hrana mít vrchol stupně 2?

4. (11.2) (ponecháno z minula) Buď G regulární graf (všechny stupně jsou stejné), a A multimnožina jeho vlastních čísel (tzv. spektrum). Jaké je spektrum

(a) doplňku $\bar{G}$?

(b) hranového grafu $L(G)$?

(c) Jaké je spektrum Petersenova grafu?

5. (13.3) Buď P cesta (graf), a $P_1, \dots, P_n$ její souvislé podgrafy ('podcesty'). Indexy neoznačují délku! Vytvořme hypergraf $H = (V(P), E)$, kde $E = \{V(P_i) : i \in [n]\}$. Ukažte, že H je úplně vyvážený.

6. (14.3) Z minula nám chybí část (b). Dále si připomeňte/dokažte Ramseyovu větu:

(a) Buď K_n^r hypergraf tvořený všemi r-ticemi z n bodů. Nechť $a_1, \dots, a_k \ge 1$. Ukažte, že existuje číslo N (nejmenší takové buď $R_n^r(a_1, \dots, a_k)$), že kdykoli obarvíme hrany (tj. r-tice) hypergrafu K_N^r pomocí k barev, tak pro nějaké i najdeme $K_{a_i}^r$ jehož všechny hrany mají barvu i.

(b) Označme $R_k(a) = R_k(a, \dots, a)$. Dokažte, že

$$R_k^{r+1}(a) < k^{R_k^r(a)^r}\,.$$