Kombinatorické etudy 2 – ZS 2010/2011

1. (3.22)

(a) Buďte $x_1, \dots, x_n$ reálná čísla. Pro každou permutaci π množiny $\{1, \dots, n\}$ definujme

$$a(\pi) = \max\{0, x_{\pi(1)}, x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(1)} + x_{\pi(2)} + \dots + x_{\pi(n)}\}.$$

Uvažme cykly $C_1, \dots, C_k$ permutace π a položme

$$b(\pi) = \sum_{l=1}^{k} \max\bigl(0, \sum_{j \in C_l} x_j\bigr)$$

Ukažte, že $\{a(\varrho) \mid \varrho \in S_n\}$ a $\{b(\pi) \mid \pi \in S_n\}$ jsou stejné (jako multimnožiny).

(b) m chlapců a m dívek při tanci vytvoří náhodné kruhy (v jednom kruhu může být libovolný počet tanečníků(-ic), i dva či dokonce jen jeden). Dokažte, že pravděpodobnost, že v každém kruhu je stejný počet chlapců a dívek, je přesně $\frac{1}{m+1}$.

2. (6.10) Buď G digraf, jehož hrany jsou obarvené červeně, zeleně a černě. Buďte $x, y \in V(G)$. Pak platí právě jedno z následujícího:

1. Existuje cesta z x do y, ve které nejsou červené hrany a všechny černé hrany v cestě obsažené jsou "po směru" (tj. od x k y).
2. Existuje množina $S \subset V(G)$, taková že $x \in S$, $y \notin S$, mezi S a $V(G) \setminus S$ nevede žádná zelená hrana a všechny černé jsou ve směru do S.

3. (7.8) Dokažte, že bipartitní graf G je elementární (viz minulý týden), právě když ho lze napsat ve tvaru $G = G_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_k$, kde $G_0 \simeq K_2$ a pro každé i je P_i cesta liché délky, která má s $G_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{i-1}$ společné jen své konce, a tyto konce jsou v opačných partitách.

4. (11.2) Buď G regulární graf (všechny stupně jsou stejné), a A multimnožina jeho vlastních čísel (tzv. spektrum). Jaké je spektrum

(a) doplňku $\bar{G}$?

(b) hranového grafu $L(G)$?

(c) Jaké je spektrum Petersenova grafu?

5. (13.2) Napřed malé definice: cyklus $v_1, e_1, x_2, v_2, \dots, v_k, e_k, v_1$ je *vyvážený*, pokud $k = 2$, nebo existuje i, j takové, že $v_i \in e_j$ a přitom $|j - i| \neq 1 \pmod{k}$. Hypergraf je *vyvážený*, pokud každý jeho lichý cyklus je vyvážený a *úplně vyvážený*, pokud každý jeho cyklus je vyvážený.

(a) Buď H úplně vyvážený hypergraf s $|E(H)| \geq 2$. Pak H má dvě hrany, e, f, takové, že každý vrchol $e \setminus f$ má stupeň 1.

(b) Buď H úplně vyvážený hypergraf, předpokládejme, že každé dvě hrany mají nejvýše p společných vrcholů. Pak

$$\sum_{e \in E(H)} (|e| - p) \leq |V(H)| - p.$$

6. (14.2)

(a) Označme $R_k(3) = R(3, 3, \dots, 3)$ (k trojek). Ukažte, že $R_k(3) \leq \lfloor ek! \rfloor + 1$, a že pro $k = 2, 3$ nastává rovnost.

(b) Ukažte, že pro $k \geq 2$

$$2^{k/2} \leq R_2(k) < 2^{2k}.$$