# Kombinatorické etudy 1 – ZS 2010/2011

**1.** (3.21) Podél závodního okruhu jsou nádrže s benzínem, celkové množství benzínu se rovná spotřebě našeho auta při objetí celé trasy. Dokažte, že je možné v některém místě na trase začít s prázdnou nádrží, a celou trať objet.

**2.** (6.8) Digraf $G$ je silně souvislý právě tehdy, když pro každou neprázdnou množinu $X \subsetneq V(G)$ existuje hrana $G$, která opouští $X$.

**3.** (7.7) Pro bipartitní graf s partitami $A$, $B$, jsou následující tvrzení ekvivalentní.

1. $G$ je souvislý a každá jeho hrana je obsažena v perfektním párování.
2. $G$ není $\bar{K}_2$ a pro každé $x \in A$, $y \in B$ má $G - x - y$ perfektní párování.
3. $G$ není $\bar{K}_2$, $|A| = |B|$ a pro každé neprázdné $X \subsetneq A$ platí $|N_G(X)| > |X|$.

(Takový graf se nazývá elementární bipartitní graf.)

**4.** (11.1) Určete vlastní čísla a vlastní vektory úplného grafu $K_n$, hvězdy $S_n$, úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$ a cyklu $C_n$. (Vlastními čísly a vektory grafu $G$ rozumíme vlastní čísla a vektory matice sousednosti $A_G$.)

**5.** (13.1) Souvislý hypergraf $H$ neobsahuje žádný cyklus právě tehdy, když

$$\sum_{E \in E(H)} |E| - 1 = |V(H)| - 1\,.$$

**6.** (14.1) (a) Každý graf s $\binom{k+l}{k}$ vrcholy obsahuje buď úplný graf s $k+1$ vrcholy, nebo nezávislou množinu velikosti $l+1$.

(b) Buďte $a_1, \ldots, a_k$ přirozená čísla ($k \geq 2$). Dokažte, že existuje celé číslo $n$ (nejmenší takové buď $R(a_1, \ldots, a_k)$), že jakkoli obarvíme hrany $K_n$ pomocí $k$ barev, tak pro nějaké $i$ bude existovat úplný graf $K_{a_i}$ jehož všechny hrany mají $i$-tou barvu.