8. cvičení z MA — 4.5.2011

Extrémy funkcí více proměnných

1. V rovině je dáno n bodů $M_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, \dots, n)$. Najděte bod $M = (a, b)$, který má nejmenší součet čtverců vzdáleností ode všech bodů M_i.

2. Máme dáno n dvojic (x_i, y_i). Najděte a, b tak, aby funkce $f(x) = ax + b$ měla minimální "kvadratickou chybu":

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 .$$

Vázané extremy

Nalezněte extrémy funkce

3.

(a) $f(x, y) = x + 2y$ na množině, kde $x^2 + y^2 = 1$;
(b) $f(x, y, z) = x + y + z$ na množině, kde $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
(c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ na množině, kde $x^2 + y^2 \leq 1$;
(d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ na množině, kde $0 \leq x < 3$, $0 \leq y < 1$;
(e) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 4y$ na čtverci s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$;
(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na množině, kde $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$;
(g) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$ na množině, kde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4.

(a) Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?
(b) Který z kvádrů o objemu V má nejmenší povrch? (A co v $\mathbb{R}^n$?)
(c) Který z kvádrů "bez víka" o objemu V má nejmenší povrch?
(d) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?
(e) (*) Jaký je optimální kelímek (komolý kužel se dnem a bez víka) s objemem 0.2ℓ?
(f) Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr?

5.

(a) Pytel rýže stojí \$50, samopal \$100. Pokud má vesnice x samopalů a y pytlů rýže, má z toho 'užitek' xy. Kolik čeho má pořídit, pokud v pokladničce je \$400?
(b) Co mají vesničané dokoupit, pokud najdou další stodolarovku?

6. Automobilka vyrábí tři typy aut: A, B, C. Pokud jich vyrobí a, b, a c, tak její zisk bude $Z(a, b, c)$. Přitom omezení kapacitou výrobní linky dává, že $pa + qb + rc = t$ $(\leq t?)$. Omezení množstvím oceli ve skladu dává $xa + yb + zc = w$ $(\leq w?)$. Kolik kterých aut mají vyrobit? Zamyslete se, co znamenají Lagrangeovy multiplikátory λ_1, λ_2!

7. Dokažte, že pro kladná $x_1, \dots, x_n$ platí

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} .$$

8. Pro kladná p_i, jejichž součet je jedna, nazveme entropií výraz $H(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} -p_i \log_2 p_i$. Jaká velká může být entropie? (Tj. nalezněte extrémy funkce H na množině $\{p; \sum_i p_i = 1, p_i > 0\}$.)