

7. cvičení z MA — 27.4.2011

Implicitní funkce

1. $y = y(x)$ splňuje rovnici $xy = 1$. Spočtěte parciální derivace y pomocí věty o implicitních funkcích.
2. $z = z(x, y)$ splňuje rovnici $z^3 - 3xyz = a^3$. Spočtěte parciální derivace z .
3. Asteroida je dána rovnicí $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Zjistěte, v okolí kterých bodů je tato křivka grafem funkce. Spočtěte její derivaci.
4. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$:
 - (a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$;
 - (b) určete $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U ;
 - (c) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.
5. Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že
 - (a) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;
 - (b) funkce f roste v jistém okolí bodu 0.
6. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2, 0]$:
 - (a) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $f(2) = 0$;
 - (b) napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 2.
7. Necht' x_0 je jednonásobný kořen rovnice $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$. Dokažte, že existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že kdykoli $|b_i - a_i| < \delta$ pro $i = 1, \dots, n$, pak rovnice $x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = 0$ má v intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ právě jeden kořen. Spočtěte $\frac{\partial x}{\partial a_i}(a_1, \dots, a_n)$.
8. Co se stane, bude-li v předchozím příkladě kořen x_0 p -násobný?
9. *Descartův list* je zadán rovnicí $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Zjistěte, v okolí kterých bodů je tato křivka grafem funkce. Spočtěte její derivaci. * Zkuste vymyslet, jak tato křivka vypadá. (Triky na nakreslení: buď polární souřadnice, nebo $p = y/x$ a vyjádřit x i y pomocí p Nebo také polární souřadnice se středem v $(1, 1)$ (?).) Má křivka nějaké asymptoty?