4. cvičení z MA — 23.3.2011

Primitivní funkce alias neurčité integrály

Převod na racionální funkce

Některé integrály lze převést na integraci racionálních funkcí. V následující tabulce značí R racionální funkci jedné, resp. dvou proměnných.

typ integrálu		doporučená substituce
$\int R(e^x)\,\mathrm{d}x$		$y = \phi(x) = e^x$
$\int R(\ln x).\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$		$y = \phi(x) = \ln x$
$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,\mathrm{d}x$		$y = \phi(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x, a > 0$		$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + y$
$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x, c > 0$		$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + yx$
$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$	r lichá v sinech	$y = \phi(x) = \cos x$
$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$	r lichá v kosinech	$y = \phi(x) = \sin x$
$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$	r sudá v sinech a kosinech	$y = \phi(x) = \mathrm{tg}\, x$
$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$		$y = \phi(x) = \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$

Následující integrály jen převeďte na racionální funkce (a rozmyslete si, jaké parciální zlomky dostanete), nemusíte už rozklad a celou prim. funkci dopočítávat.

1. (jednoduché)

(a) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x,$

(b) $\int \frac{1}{e^{2x}-3e^x-4}\,\mathrm{d}x,$

(c) $\int \frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}\,\mathrm{d}x,$

(d) $\int \frac{1}{x(\log^2 x-5\log x+6)}\,\mathrm{d}x,$

2. (odmocniny)

(a) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x,$

(b) $\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x,$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x,$

(d) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x,$

(e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x,$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x,$

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,\mathrm{d}x,$

(h) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x,$

(i) $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x,$

(j) $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x$.

3. (trigonometrické)

(a) $\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int \operatorname{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$,

(g) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,\mathrm{d}x$,

(h) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$,

(i) $\int \frac{1}{x\sqrt{-\ln^2 x+4\ln x-3}}\,\mathrm{d}x$.

4. (nestandardní substituce)

(a) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ $(t = x + 1/x)$,

(b) $\int \sin \log x\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}}\,\mathrm{d}x$ $(x = a\cos^2 t + b\sin^2 t)$,

(d) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ $(x = \operatorname{tg} x)$,

(e) $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $(x = \cosh t)$,

(f) $\int \frac{\log \cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$,

(g) $\int \sqrt{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$,

(h) $\int \frac{1}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}\,\mathrm{d}x$,

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$,

(j) $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

5. (lepení)

(a) $\int |x|\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \max\{x, x^2\}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int |\sin x + \frac{1}{2}|\,\mathrm{d}x$.