2. cvičení z MA — 9.3.2011

Primitivní funkce alias neurčité integrály

Doplňte následující tabulku:

$f(x)$	$F(x)$	interval
x^a, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$		
$\frac{1}{x}$		
e^x		
$\sin x$		
$\cos x$		
$\frac{1}{\cos^2 x}$		
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\frac{1}{1+x^2}$		

Zopakujte si, jak se integruje substitucí a metodou per partes. Čím se liší dvě věty o substituci?

Při integrování nezapomeňte určit interval, na kterém je výsledek platný.

1. (základní) Tady by mělo stačit použít výše uvedenou tabulku.

(a) $\int x^3 + 2x + \frac{17}{x} \,\mathrm{d}x$,

(b) $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x \,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \sqrt{x^6} \,\mathrm{d}x$,

(d) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x$.

2. (jednoduchá substituce) Tady bude potřeba nějaká substituce – kterou by mělo být snadné uhádnout.

(a) $\int \sqrt[3]{1-3x} \,\mathrm{d}x$,

(b) $\int \sin^7 x \cos x \,\mathrm{d}x$,

(c) $\int x e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$,

(d) $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$,

(e) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} \,\mathrm{d}x$,

(f) $\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x$,

(g) $\int \frac{x}{1+x^4} \,\mathrm{d}x$,

(h) $\int \frac{x^2}{\cos x^3} \,\mathrm{d}x$,

(i) $\int \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x$,

(j) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} \,\mathrm{d}x$,

(k) $\int \sin^{2k+1} x \,\mathrm{d}x$,

(l) $\int \cos^{2k+1} x \,\mathrm{d}x$,

(m) $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$,

(n) $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

3. (per partes)

(a) $\int x \sin x \,\mathrm{d}x$,

(b) $\int x^a \ln x \,\mathrm{d}x$ (kde $a > 0$),

(c) $\int x^2/e^x \,\mathrm{d}x$,

(d) $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$,

(e) $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$,

(f) $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$,

(g) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

4. (rekurentní formule)

(a) $\int \sin^n x \,\mathrm{d}x$

(b) $\int \cos^n x \,\mathrm{d}x$

(c) $\int e^x x^n \,\mathrm{d}x$

5. (trochu těžší)

(a) $\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$.

(b) $\int \operatorname{cotg}^2 x \,\mathrm{d}x$.

(c) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$.

6. Rozmyslete si, jak vypadá graf f', resp. F, je-li dán graf f.

Vyšetřete, jaké vlastnosti musí mít primitivní funkce k funkci f, která je lichá, sudá, omezená, periodická, neklesající, nezáporná.