

Zkoušky z NMAI054, paralelka X, zimní semestr 2010/2011

Pozn.: podmínky mohou být mírně upraveny podle skutečně probrané látky.

Obecné podmínky

Zkoušku mohou skládat pouze studenti, kteří mají předmět NMAI054 zapsaný v zimním semestru 2010/2011 a jsou zařazeni do paralelky X. (Písemná část bude společná s paralelkou Y – paní Stará.)

Nutnou podmínkou ke skládání zkoušky je získání zápočtu – před písemnou částí zkoušky.

Zkouška se skládá z písemné a ústní části, písemná část předchází ústní části. Pokud student neuspěl u písemné části, neprospěl u tohoto termínu. (Pokud se student zúčastní písemky a neodevzdá ji, získal 0 bodů.) Pokud student uspěl u písemné části, skládá ústní zkoušku. Při druhém opravném termínu (tedy třetím termínu zkoušky) postupují k ústní zkoušce všichni studenti. Neprospěje-li student u ústní zkoušky, neprospěl u tohoto termínu.

Pokud student při ústní zkoušce neuspěje a absolvoval písemnou část s méně než 40 body, opakuje při opravném termínu písemnou i ústní část zkoušky. Pokud získal za písemnou část alespoň 40 bodů, může opakovat pouze ústní část zkoušky.

Během semestru se konají dvě dobrovolné **bonifikační písemky**, a to **19.11. a 7.1.** Každá z nich obsahuje tři příklady a za každý lze získat maximálně 5 bodů. Součet bodů z dobře vyřešených příkladů (tj. z příkladů, za které získal student **alespoň 4 body**) se započítává do hodnocení písemné části zkoušky (maximálně v počtu 20). Maximální počet bodů za písemnou část (zkoušková písemka+body z bonifikačních písemek) je 50 bodů.

Písemná část zkoušky

K účasti na písemce je nutné mít získaný (a v SISu zapsaný) zápočet.

Písemná část zkoušky se skládá ze čtyřech příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Příklady jsou vybrány z okruhů

- 1) Výpočet limity posloupnosti nebo limity funkce (10 bodů)
- 2) Vyšetření konvergence a absolutní konvergence řady (10 bodů)
- 3) Výpočet derivace funkce a jednostranné derivace v problémových bodech (10 bodů)
- 4) Průběh funkce (20 bodů)

Písemná část trvá 120 minut. U písemky **lze používat jeden tahák** velikosti A4. Během písemky nelze používat mobilní telefony, kalkulačky ani jinou výpočetní techniku. Při písemné i ústní části zkoušky se student prokáže dokladem s fotografií. Student uspěje u písemné části, pokud součet bodů získaných za bonifikační písemky a za písemnou část zkoušky je alespoň 30 bodů.

Pozor – úplné řešení musí obsahovat i zdůvodnění, tj. např. při použití věty o limitě složené funkce je třeba ověřit její předpoklady. (Při použití jiných vět samozřejmě taky.)

Vzor zadání písemky

- 1) Spočítejte následující limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + \sqrt{n}} - \sqrt[3]{n^3 - 1}) \sqrt{3n^3 + 1}.$$

- 2) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2 + 1}\right) n^\alpha$$

a) pro $\alpha = 1$ b) pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Určete definiční obor, vypočtete derivaci a jednostranné derivace pro funkci

$$g(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

4) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

Ústní část zkoušky

Ústní část zkoušky se koná zpravidla následující den/dny po části písemné. Student si vylosuje sadu čtyř otázek. Po zhruba 30 minutách na přípravu začíná zkoušení. Pokud nemá student ještě nějaké otázky vypracované, tak dostane po prozkoušení již připraveného čas na jejich dokončení. K vypracování odpovědí nelze používat jiné pomůcky než psací potřeby. Odpovědi jsou zhodnoceny a obodovány zkoušejícím.

Skladba otázek a počty bodů :

- 1) Klíčový pojem (neboduje se)
- 2) Tři definice nebo znění věty (každá otázka za 5 bodů)
- 3) Lehká věta a její důkaz (5 bodů za znění a 10 bodů za důkaz)
- 4) Těžká věta a její důkaz (5 bodů za znění a 15 bodů za důkaz)

Seznamy klíčových pojmů, definic, lehkých a těžkých vět budou k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic, respektive vět, se považuje jejich porozumění a schopnost je používat.

Vzor zadání otázek

- 1) Spojitost funkce v bodě zleva (0 bodů)
- 2) Limita posloupnosti, supremum množiny, věta o aritmetice pro limity posloupností (15 bodů)
- 3) Lagrangeova věta (15 bodů)
- 4) Heineho věta (20 bodů)

Celkové hodnocení zkoušky

- 1) Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu.
- 2) Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 30 bodů z písemné zkoušky, alespoň 30 bodů z ústní zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu.
- 3) K celkovému hodnocení známkou výborně je potřeba získat alespoň 90 bodů, z toho alespoň 30 bodů za písemnou a alespoň 30 bodů za ústní část.
- 4) K celkovému hodnocení známkou velmi dobře je potřeba získat alespoň 75 bodů, z toho alespoň 30 bodů za písemnou a alespoň 30 bodů za ústní část.

Seznam klíčových pojmů

- supremum, infimum
- limita posloupnosti (vlastní i nevlastní)
- konvergentní (divergentní) řada
- okolí včetně nevlastních bodů, jednostranná a prstencová okolí
- (vlastní i nevlastní) limita funkce včetně jednostranných ve vlastním i nevlastním bodě
- spojitost funkce v bodě (i jednostranná)
- extrém funkce (všechny typy)
- derivace funkce v bodě
- funkce konvexní a konkávní

Definice

- zdola omezená, shora omezená nebo omezená množina
- posloupnost reálných čísel
- zdola omezená, shora omezená nebo omezená posloupnost
- neklesající, nerostoucí, rostoucí, klesající posloupnost
- vybraná posloupnost
- konvergentní, divergentní posloupnost
- rozšířená reálná osa
- limes superior, limes inferior
- částečný součet řady
- absolutně konvergentní řada
- funkce jedné reálné proměnné
- zdola omezená, shora omezená nebo omezená funkce
- neklesající, nerostoucí, rostoucí, klesající funkce
- sudá, lichá, periodická funkce
- složená funkce
- prostá funkce, inverzní funkce
- spojitost funkce na intervalu
- obecná mocnina a^b
- druhá derivace funkce v bodě
- ryze konvexní a ryze konkávní funkce
- asymptota funkce

Lehké věty

Upozornění: zde jsou jen věty, které jsme měli s důkazem. Znění budu zkoušet i u vět, které jsme nedokazovali, viz přehled probrané látky.

- iracionalita $\sqrt{2}$
- Bernoulliho nerovnost
- Cantorova
- o existenci infima
- Archimédova vlastnost
- hustota \mathbb{Q} a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- trojúhelníková nerovnost
- jednoznačnost vlastní limity posloupnosti
- omezenost konvergentní posloupnosti
- o limitě vybrané posloupnosti
- limita a uspořádání
- o dvou strážnících
- o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti
- aritmetika limit podruhé

- limita typu $A/0$
- o limitě monotónní posloupnosti
- nutná podmínka konvergence řady
- linearita řad
- srovnávací kritérium konvergence řad
- limitní srovnávací kritérium konvergence řad
- Cauchyovo odmocninové kritérium konvergence řad
- Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad
- vztah konvergence a absolutní konvergence
- Leibnitzovo kritérium konvergence řad
- o jednoznačnosti limity funkce
- limita funkce a omezenost
- vztah derivace a spojitosti
- derivace inverzní funkce
- derivace a limita derivace
- Fermatova věta
- o vztahu derivace a monotonie
- tvar asymptoty
- Rolleova věta
- Lagrangeova věta o střední hodnotě

Těžké věty

Upozornění: zde jsou jen věty, které jsme měli s důkazem. Znění budu zkoušet i u vět, které jsme nedokazovali, viz přehled probrané látky.

- o n -té odmocnině
- aritmetika limit posloupností
- Bolzano-Weierstrassova
- Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnosti
- kondenzační kritérium konvergence řad
- Heineho věta
- o aritmetice limit funkcí
- limita složené funkce
- Darbouxova vlastnost spojitě funkce
- aritmetika derivací
- derivace složené funkce
- o inverzní funkci
- zavedení exponenciály