2. zkoušková písemka MA – 25.1.2011 – řešení

Na každý papír napište: číslo příkladu, jméno a paralelku: X (Šámal) nebo Y (Stará).

1. (10 bodů) Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

2. (10 bodů) Rozhodněte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ následující řada konverguje absolutně. Zjistěte, zda pro $\alpha = 0$ řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}{n^\alpha}(-1)^n$$

Vzpomeňme si, že $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$. (2 body)
Pro absolutní konvergenci použijeme limitní srovnávací kritérium s řadou $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha-1/2}}$. (1 bod).

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}{n^\alpha}}{n^{\alpha-1/2}} &= \frac{\sin\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}}{n^{-1/2}} \\
&= \frac{\sin\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}}{n^{-1/2}}
\end{aligned}$$

Nyní limita druhého výrazu je 1 (VoAL) (0.5 b), limita prvního je také jedna (Heineho věta, VoLSF, limta pro sinus) (3 b).
Souhrnem, řada konverguje právě když $\alpha - 1/2 > 1$, neboli $\alpha > 3/2$. (0.5 bod)
Pro neabs. konvergenci stačí využít Leibnizovu větu. K tomu je potřeba ověřit, že $a_n = \sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \sin\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ je klesající posloupnost s limitou 0. (2.5 b)
Závěr: pro $\alpha = 0$ řada konverguje (ale ne absolutně). (0.5 b)

---

3. (10 bodů) Určete definiční obor následující funkce, rozhodněte, ve kterých bodech má funkce derivaci (příp. jednostranné derivace), a spočtěte ji (je).

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^3-1}{x}} & \text{pokud } x \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 0. \end{cases}$$

Funkce je předpisem definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Podle vzorce ji můžeme derivovat pro $x \neq 0$, vyjde nám: (4 body)

$$f'(x) = e^{\frac{x^3-1}{x}}(x^2 - x^{-1})' = e^{\frac{x^3-1}{x}}(2x + x^{-2})$$

V bodě $x = 0$ postupujeme podle věty: funkce je zde spojitá zprava, ale nespojitá zleva (VoLSF, 1 bod), spočteme tedy limitu (celkem 3 body)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0_+} f'(x) &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{x^3-1}{x}}(2x + x^{-2}) \\
&= \lim_{x\to 0_+} e^{x^2} e^{\frac{-1}{x}}(2x + x^{-2}) \\
&= \lim_{x\to 0_+} 2x e^{x^2} e^{\frac{-1}{x}} + \lim_{x\to 0_+} e^{x^2} \lim_{x\to 0_+} e^{\frac{-1}{x}} x^{-2} \\
&= 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y}}{y^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Poslední limitu spočteme třeba pomoci l'Hospitalova pravidla (dvakrát). Derivaci v nule zleva spočteme podle definice – vyjde snadná limita $-\infty/+0$. (1 bod) Závěr: v nule má f jednostranné derivace $f'_+(0) = 0$, $f'_-(0) = -\infty$. Pro $x \neq 0$ má derivaci viz výše. (1 bod)

---

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh následující funkce (tj. najděte definiční obor, obor spojitosti, extrémy, inflexní body, asymptoty, vyšetřete monotonii a konvexitu / konkávnost, chování v krajních bodech definičního oboru, periodicitu a sudost/lichost, nakreslete graf).

$$|x-2|\, e^{1/x}$$

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.
Na vypracování máte 120 minut.
Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, …(Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)
Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je ($137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701).
Můžete využívat jeden tahák o formátu A4.