1. zkoušková písemka MA – 18.1.2011 – řešení

(Bodování je orientační, může být upraveno podle úvahy opravovatelů.)

1. (10 bodů) Položme $a_n = \operatorname{arctg} \frac{2}{1+n^2} \left(\ln(e^{(n^3)} - 2)\right)^\alpha$. Posloupnost (a_n) lze přepsat takto

$$a_n = \frac{\operatorname{arctg} \frac{2}{1+n^2}}{\frac{2}{1+n^2}} \left(\frac{n^3 + \ln(1 - 2e^{-n^3})}{n^3}\right)^\alpha \frac{2n^{3\alpha}}{1+n^2}.$$

Odtud je zřejmě $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n{=}0$ pro $\alpha < \frac{2}{3}$, posloupnost je omezená a limita neexistuje pro $\alpha = \frac{2}{3}$, posloupnost je neomezená a limita neexistuje pro $\alpha > \frac{2}{3}$.
Body: 3 za prepis arctg, 3 za přepis logaritmu a 4 za závěrečnou diskusi.
Komentář: Mnozí použili l'Hospitalovo pravidlo, čímž si přidělali dost práce, a někteří i chyb. Lepší bylo pomocí l'Hospitala odvodit třeba pravidlo $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, a pak do něj substituovat.

2. (10 bodů) Na základě Leibnizovy věty usoudíme, že řada je konvergentní. Potřebujeme k tomu ověřit, že $a_n = n \log n + \frac{(-1)^n}{n} + 17$ je rostoucí posloupnost pro dostatečně velká n. To ověříme podle definice:

$$a_{n+1} - a_n > \log n - 2/n > 0$$

což platí pro $n \geq 3$. (2 body za použití Leibn. věty, 2 body za ověření monotonie)
Absolutní konvergenci vyšetříme limitním srovnávacím kritériem, srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{n \log n}$ (o které víme, že diverguje). (2 body za správné krit., 1 bod za limitu, 1 bod za znalost, příp. ověření, že diverguje)
Závěr: Řada konverguje, avšak ne absolutně. (2 body za výsledek)
Komentář: příklad nepodl příliš dobře. V části o abs. konvergenci někteří měli za to, že řada $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ je konvergentní (čímž pak mylně usoudili, že není třeba vyšetřovat neabsolutní konvergenci). Při použití Leibnizovy věty je třeba ověřovat předpoklady: konvergenci k nule a monotonii!

3. (10 bodů) Pro $|x| > 1$ je jistě $f'(x) = 0$. (.5 bodu) Pro $|x| < 1$ zderivujeme podle pravidel na (3 body)

$$e^{-\frac{1}{1-x^2}} \frac{-2x}{(1-x^2)^2}.$$

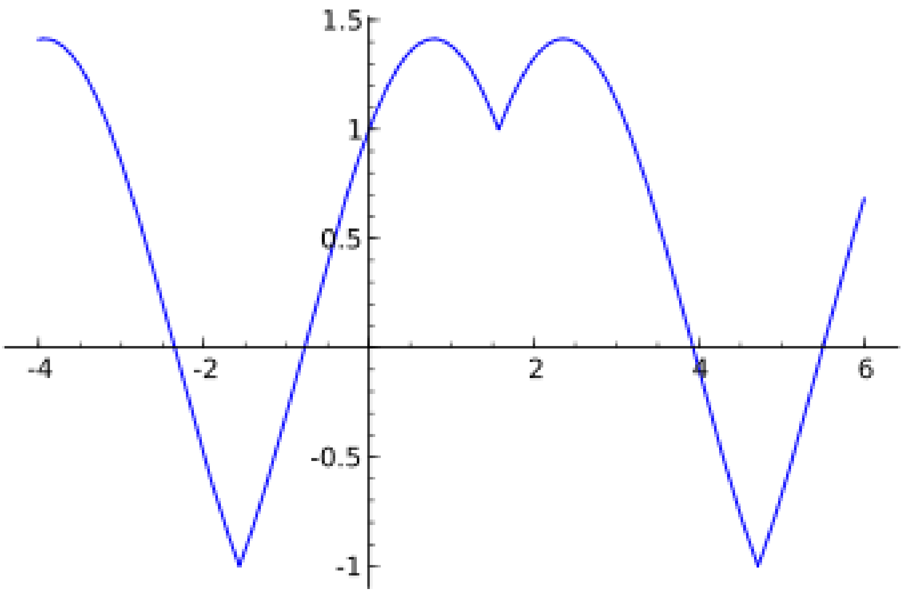
Zbývá vyšetřit derivaci v bodech ± 1. Funkce f je zde spojitá (VoLSF) (1b za tvrzení, 1b za zdůvodnění), použijeme tedy větu o jednostranné derivaci. (1b za její znění) Dvě z nich jsou jednoduché $f'_-(-1) = f'_+(1) = 0$, neboť na příslušnou stranu od podezřelého bodu je funkce konst. nula. (.5 bodu) Zbylé dva případy vyřešíme pomocí VoLSF. Subst. $y = 1/(1-x^2)$, převedením na případ $\lim y^2 e^- y = 0$ (buď známé, nebo 2xl'Hospital).
Závěr: i v $x = \pm 1$ existuje oboustranná derivace a je $f'(1) = f'(-1) = 0$. (3 body)
Komentář: Mnozí neověřovali předpoklad pro výpočet jednostranné derivace jako limity derivací – spojitost funkce v daném bodě (zleva, resp. zprava). Objevovaly se i chyby v mechanickém derivování – zapomenutá znaménka, občas i chybějící derivace vnitřní funkce.

Při výpočtu limity se spíše než substituce (jako např. výše uvedená) aplikovala metoda věštění z křišťálové koule. (Nic proti této metodě :-), ale špatně se ověřuje, jestli vaše křišťálová koule funguje spolehlivě ...)

4. (20 bodů)

$$f(x) = \sin x + |\cos x|$$

1/2 b.Definiční obor - $\mathbb{R}$
1/2 b.Periodicita - 2π periodická, stačí průběh na $[\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
1 b.Limity- neexistují, f nekonstantní, periodická
3b.Derivace - $f'(x) = -\sin x + \cos x$ na $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f'(x) = \sin x + \cos x$ na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$,
$f'_+(\frac{-\pi}{2}) = 1$, $f'_-(\frac{\pi}{2}) = -1$, $f'_+(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f'_-(\frac{3\pi}{2}) = -1$.
3 b.Monotonie rostoucí na $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$, klesající na $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$.
2 b.Lokální a globální extrémy- globální maxima v $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, globální minima v $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$, lokální v $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
1 b.Druhá derivace-$f''(x) = -\sin x - \cos x$ na $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = \sin x + \cos x$ na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
3b.Konvexita - konvexní na $[\frac{-\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$,$[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ konkávní na $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ a na $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}]$
1 b.Inflexní body- $\frac{-\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$
1 b.Asymptoty-neexistují
4 b. graf



Komentář: Někteří měli problémy už s přečtením formule $|\cos x|$, a interpretovali ji např. jako $\cos |x|$. Objevovaly se pokusy o elegantní řešení pomocí vztahu $|x|' = sgn(x)$ (platného pro $x \neq 0$), ale často pak došlo k chybě. Bezpečnější je funkci analyzovat zvlášť v případech kdy $\cos x > 0$ a zvlášť když $\cos x < 0$. S ohledem na 2π-periodicitu, toto stačí dělat na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$, a na $[\pi/2, 3\pi/2]$. Často chyběl výpočet jednostranných derivací v bodech, kde neexistuje derivace oboustranná.