2. bonifikační písemka – Řešení

---

1. V závislosti na parametru $a > 0$ vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^a \log n.$$

Základní limita pro cosinus (tj. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$) napoví, že se zadaná řada chová podobně jako řada jejíž n-tý člen je $b_n = \log n/n^{2a}$. Vskutku, označme $a_n = (1-\cos\frac{1}{n})^a \log n$ a všimněme si, že $a_n \geq 0$ a $b_n \geq 0$ pro všechna n. Můžeme tedy použít limitní srovnávací kritérium, které po nás žádá spočítat limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{1/n^2}\right)^a .$$

Použitím Heineho věty ($x_n = 1/n$, přičemž zjevně $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ a $x_n \neq 0$) toto převedeme na výpočet limity

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^a .$$

Podle věty o limitě složené funkce (umocnění na a je spojitá funkce) a výše zmíněné limity pro cosinus (kterou lze též spočítat pomocí l'Hospitalova pravidla) je tato limita rovna $1/2^a$, což je kladné reálné číslo. Podle limitního srovnávacího kritéria tedy $\sum a_n$ konverguje právě když konverguje $\sum b_n$.
Pokud je $2a \leq 1$ (čili $a \leq 1/2$) tak je $b_n \geq 1/n$, (pro $n \geq 3$), což je divergentní řada, tudíž pro taková a i zadaná řada diverguje. Pokud je naopak $2a > 1$ (tedy $a > 1/2$) tak označme $t = (2a+1)/2$ (čili $1 < t < 2a$). Nyní řada $\sum_n 1/n^t$ konverguje, zároveň podle limitního srovnávacího kritéria je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1/n^t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{2a-t}} = 0\,,$$

tudíž i řada $\sum_n b_n$ a tedy i řada $\sum_n a_n$ konvergují.

---

2. Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2\cos x}}}{x},$$

a v případě, že ano, spočtěte ji.

Spočítejme limitu $A = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^2-e^{2\cos x}}}{|x|}$. Ukáže se, že tato limita existuje (a tudíž zadaná neexistuje), ale nepředbíhejme.
Spočtěme napřed $B = \lim_{x\to 0} \frac{e^2-e^{2\cos x}}{x^2}$; pokud tato limita existuje a $B \geq 0$, pak podle věty o limitě složené funkce ($\sqrt{}$ je spojitá funkce!), je $A = \sqrt{B}$.
Pro výpočet "pomocné" limity použijeme l'Hospitalovo pravidlo, typ $\frac{0}{0}$. (Čitatel i jmenovatel jsou spojité funkce, takže pro zjištění, že mají v nule limitu nula stačí dosadit.)
Dostaneme limitu $\lim_{x\to 0} \frac{-e^{2\cos x}\cdot(-2\sin x)}{2x}$. To se podle věty o aritmetice limit rovná $\lim_{x\to 0} e^{2\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.
První z těchto limit je ze spojité funkce, druhá limita je rovna 1 podle definice sinu. Tudíž $B = e^2$ a $A = e$.

Nyní se vraťme k zadané limitě. Pro $x > 0$ je $|x| = x$, a tedy

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2\cos x}}}{x} = A = e/\sqrt{2}\,.$$

Naopak pro $x < 0$ je $|x| = -x$ a tudíž

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2\cos x}}}{x} = -A = -e/\sqrt{2}\,.$$

Protože pravo- a levostranné limity se nerovnají, oboustranná limita neexistuje.

---

3. Rozhodněte, ve kterých bodech má funkce

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$$

derivaci (případně jednostranné derivace), a v těchto bodech (jednostrannou) derivaci spočtěte.

Nejprve prozkoumejme, kdy je $f(x)$ definováno: $\arcsin y$ je definován pro $y \in [-1, 1]$. Potřebovali bychom tedy, aby

$$-1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1$$

což lze upravit na dvě nerovnosti: $0 \le x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ a $0 \le x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Tedy $D_f = \mathbb{R}$ a můžeme derivovat.

Podle vzorce pro derivaci složené funkce je

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' \\
&= \frac{|x^2+1|}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{|x^2-1|} \frac{2(1-x^2)}{x^2+1} \\
&= \frac{\pm 2}{x^2+1}\,,
\end{aligned}$$

přičemž $+2$ bereme pokud $x^2 - 1 < 0$ a -2 pokud $x^2 - 1 > 0$. Zamysleme se nyní, zda/kdy toto odvození má smysl. Pokud $x^2 - 1 = 0$ (neboli $x = \pm 1$), pak ve vzorci pro derivaci složené funkce násobíme $\infty \cdot 0$ (nemluvě o tom, že arcsin v ± 1 má jen jednostrannou derivaci). Pro ostatní x odvození funguje díky větě o limitě složené funkce.

Nyní prozkoumejme (jednostrannou) derivaci v ± 1. Podle věty o derivaci coby limitě derivací je

$$\begin{aligned}
f'_+(1) &= \lim_{x\to 1_+} f'(x) = \lim_{x\to 1_+} \frac{-2}{x^2+1} = -1 \\
f'_-(1) &= \lim_{x\to 1_-} f'(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{+2}{x^2+1} = 1 \\
f'_+(-1) &= \lim_{x\to -1_+} f'(x) = \lim_{x\to -1_+} \frac{+2}{x^2+1} = 1 \\
f'_-(-1) &= \lim_{x\to -1_-} f'(x) = \lim_{x\to -1_-} \frac{-2}{x^2+1} = -1
\end{aligned}$$

Protože jednostranné derivace se liší, tak v ± 1 (oboustranná) derivace neexistuje.