1. konf. – řešení

(1) Použijeme binom. větu $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, vypíšeme jen důležité členy.

$$\text{Čitatel} = \cancel{n^{200}} + \binom{100}{1} \cdot n^{198} + P_1(n)$$

$$- \left(\cancel{n^{200}} + \cancel{\binom{200}{1} \cdot n^{199} \cdot 3} + \binom{200}{2} \cdot 3^2 \cdot n^{198} + P_2(n)\right)$$

$$\cancel{+ 600\, n^{199}}$$

$$= n^{198} \cdot \left(\binom{100}{1} - 9 \cdot \binom{200}{2}\right) + P_3(n)$$

(P_1, P_2, P_3 – polynomy stupně ≤ 197)

$$\text{Jmenovatel} = n^{99} \cdot (n^{99}+1) / 2$$

Takže

$$\frac{\text{čitatel}}{\text{jmenovatel}} = \frac{\binom{100}{1} - 9\binom{200}{2} + \overbrace{\frac{P_3(n)}{n^{198}}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{n^{99}}}_{\to 0}} \cdot 2$$

Dle VoA je limita rovna $\boxed{2 \cdot \left(\binom{100}{1} - 9\binom{200}{2}\right)}$.

② Zdá se, že výraz v [-] je zhruba n, na závorku bychom měli užít rozšíření odmocniny. Pro pohodlí pronásobme vše $\frac{n}{n}$ a rozdělme na 2 limity:

$$\text{daná limita} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\left[\sqrt[4]{n^4+n^3+2}\right]}{n}}_{a_n} \cdot \underbrace{n\left(\sqrt[3]{27n^3+2n}-3n\right)}_{b_n}$$

VoAL

$= \lim a_n \cdot \lim b_n$ -- pokud obě existují a součin má smysl

(a_n)

$$1 = \frac{n}{n} \le a_n \le \frac{\sqrt[4]{n^4+n^3+2}}{n} \le \frac{\sqrt[4]{(n+1)^4}}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{n}{n} \to 1, \qquad \frac{n+1}{n} \to 1$$

Dle Vo policajt je $\underline{\lim a_n = 1}$.

(b_n)

$$b_n = n\left(\underbrace{\sqrt[3]{27n^3+2n}}_{a} - \underbrace{3n}_{b}\right) = n\,\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} =$$

$$\cancel{n}\cdot\frac{\cancel{27n^3}+2\cancel{n}-\cancel{(3n)^3}}{\cancel{n^2}\left(\sqrt[3]{27+\frac{2}{n^2}}^{\,2} + \sqrt[3]{27+\frac{2}{n^2}}\cdot 3 + 3^2\right)}$$

$$\sqrt[3]{27+\tfrac{2}{n^2}}^{\,2} \to 3^2, \quad \sqrt[3]{27+\tfrac{2}{n^2}} \to 3, \quad 3 \to 3, \quad 3^2 \to 3^2$$

$$\Rightarrow \lim b_n = \frac{2}{3\cdot 3^2} \Rightarrow \boxed{\lim a_n b_n = \frac{2}{27}}$$

(3) Spočtěme první členy: $a_1 = -10$,

$$a_2 = \frac{3\cdot(-10)}{1-20} = \frac{-30}{-19} \quad (\doteq 1.5)$$

$$a_3 = \frac{3\cdot\frac{30}{19}}{1+2\cdot\frac{30}{19}} = \frac{90}{79} \quad (< 1.5)$$

Zkusme, zda platí $a_2 > a_3 > \dots$

(Pokud ano, má posl. limitu.)

- zjevně $a_n > 0$ pro $n \geq 2$ (MI)
- $a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{1+2a_n} \overset{?}{<} a_n$ $\quad$ ($a_n > 0$, $1+2a_n > 0$)

$$3 \overset{?}{<} 1+2a_n$$

$$a_n \overset{?}{>} 1$$

Dokážeme MI pro $n \geq 2$

- $a_2 = \frac{30}{19} > 1$

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{1+2a_n} \overset{?}{>} 1$$

$$3a_n \overset{?}{>} 1+2a_n$$

$$a_n \overset{?}{>} 1$$ ..... platí z ind. předp.

Tedy a_n je klesající (pro $n \geq 2$), zdola omez.

$\Rightarrow$ ex. $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$.

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{1+2a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{3a_n}{1+2a_n} = \frac{3A}{1+2A}$$

$\lim a_{n+1} = A$

VSAC $\left(A \neq -\frac{1}{2},\right.$ neb $\left.a_n > 0\right)$

$$A = \frac{3A}{1+2A}, \quad A > 0$$

$$\Downarrow$$

$$1+2A = 3A$$

$$A = 1$$

Zicii: $\boxed{\lim a_n = 1}$