

9. cvičení z MA—21.12.2010

Další limity funkcí

V následujících dvou příkladech se vám bude hodit věta o limitě složené funkce (neboli jak používat substituci).

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x}$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x+\sqrt{x+x^2}}}{\sqrt{2+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
2. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$, (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)} x^k$, (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x - x^2)}{x}$, (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x - x + \frac{x^3}{6})}{x}$,
(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1})$.

3. S využitím vlastností exponenciální a logaritmické funkce spočítejte následující limity ($\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$)

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n})^n$
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$, (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+\sqrt{x+\sqrt[3]{x}})}{\log(1+\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x}})}$, (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}$,

4. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ lze funkci

$$f(x) = x^a (\arcsin x - \operatorname{arctg} x)$$

spojitě rozšířit na \mathbb{R} . Totéž zjistěte pro funkci

$$g(x) = x^a - \sin(\log x) \cdot \operatorname{arctg} x.$$

5. Spočítejte limity posloupností. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sin \frac{1}{n} \right)$,
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(2 \cos \frac{1}{n^2} - 3 + \sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} \right)$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^{-2} + e^{1/n})}{\log(n^{-4} + e^{2/n})}$.

Derivace

Co je to derivace? Jak se spočítá derivace součtu, součinu, podílu funkcí? Derivace složené funkce, inverzní funkce? Jaké jsou derivace elementárních funkcí?

6. Spočítejte derivace následujících funkcí.

- (a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin \frac{x+1}{x^2+1}$, $\cos \ln x$, $\ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$
(b) x^x , $(1/x)^{1/x}$, $(\sin x)^{\cos x}$
(c) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$, $\ln \arccos x$, $\arcsin \sin x$

7. Vypočítejte derivaci funkcí

(a)

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \text{pro ostatní } x \end{cases}$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{pro } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}$$

8. Spočítejte derivace $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geq 1$) jednak přímo, jednak pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

9. (a) Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?
(b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?
10. Dokažte a zapamatujte si následující nerovnosti. (a) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \geq 1 + x$.
(b) pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin x \leq x$.
11. $(1 + 1/x)^x$ je rostoucí funkce ($x \in \mathbb{R}^+$).