3. cvičení z MA — 19.10.2010

Spočtěte následující limity (nebo dokažte, že neexistují). Bude se vám k tomu hodit věta o aritmetice limit (VoAL):

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ (má-li pravá strana smysl)
- $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$ (má-li pravá strana smysl)
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$ (má-li pravá strana smysl)
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (má-li pravá strana smysl)

Často se stává, že pravá strana nemá smysl – vyjde nám třeba rozdíl $\infty - \infty$ (příklad 2a), nebo podíl ∞/∞ (příklad 1c). V takovém případě je potřeba vhodnou fintou zadaný výraz upravit, abychom po aplikaci VoAL dostali definovaný výraz.

1. (a) $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} (4 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2 - 2n})(5 - \frac{1}{n})$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1}$.

2. (a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}\right)$,

3. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$.

Maličko přitvrdíme ... Budeme používat též větu o policajtech.

4. (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a \geq 0)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

5. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^a + n^{a-1} + \cdots + n + 1}{n^b + n^{b-1} + \cdots + n + 1}$ ($a, b \in \mathbb{N}$ parametry)

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + a^{n-1} + \cdots + a + 1}{b^n + b^{n-1} + \cdots + b + 1}$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry, $|a|, |b| < 1$)

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$,

7. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n$ ($q > 0$ je parametr),

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^3}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n}$ (kde $A, B, C > 0$),

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$.

8. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor}{n^2}$ (parametr $x \in \mathbb{R}$),

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.