K přečtení místo odpadlé přednášky z MA 2.12.2008

Robert Šámal

IV. Funkce jedné reálné proměnné

4.1. Základní definice

Definice. Funkcí jedné reálné proměnné *rozumíme zobrazení* $f : M \to \mathbb{R}$, *kde* $M \subseteq \mathbb{R}$. *Množina* M *se nazývá* definiční obor *funkce* f *a značí* D_f.

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je*

rostoucí, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y: \quad f(x) < f(y)$,

klesající, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y: \quad f(x) > f(y)$,

nerostoucí, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y: \quad f(x) \geq f(y)$,

neklesající, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y: \quad f(x) \leq f(y)$.

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je*

sudá, *jestliže* $\forall x \in M: \quad -x \in M\ \&\ f(x) = f(-x)$,

lichá, *jestliže* $\forall x \in M: \quad -x \in M\ \&\ (f(x) = -f(-x))$,

periodická, *jestliže*

$$\exists p > 0\ \forall x \in M: \quad x + p \in M\ \&\ x - p \in M\ \&\ f(x) = f(x + p)\,.$$

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je* omezená *(*omezená shora, omezená zdola*), jestliže* $f(M)$ *je omezená (shora omezená, zdola omezená) podmnožina* $\mathbb{R}$. *Symbolem* $f(M)$, *nebo také* H_f *značíme* množinu hodnot funkce f, *tj. množinu* $\{f(x) : x \in M\}$.

Definice. *Nechť* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. *Řekneme, že funkce* f *nabývá v bodě* $a \in M$

maxima na M *jestliže* $\forall x \in M: \ f(x) \leq f(a)$,

minima na M *jestliže* $\forall x \in M: \ f(x) \geq f(a)$,

ostrého maxima na M *jestliže* $\forall x \in M,\ x \neq a: \ f(x) < f(a)$,

ostrého minima na M *jestliže* $\forall x \in M,\ x \neq a: \ f(x) > f(a)$,

lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima) na M *jestliže existuje* $\delta > 0$ *tak, že* f *nabývá na* $M \cap (a - \delta, a + \delta)$ *svého maxima (ostrého maxima, ostrého minima, minima).*

K zamyšlení: Může nějaká funkce nabývat lokálního minima v každém bodě definičního oboru? Ostrého lokálního minima? Co když chceme, aby funkce byla definovaná na celém $\mathbb{R}$? (Pozor, poslední část je těžká!)

Definice. *Buďte* $f : M \to \mathbb{R}$ *a* $g : N \to \mathbb{R}$ *funkce,* $M, N \subseteq \mathbb{R}$*. Složením těchto funkcí myslíme funkci* $h : N' \to \mathbb{R}$*, kde*

1. $h(x) = f(g(x))$ *pro všechna* $x \in N'$
2. $N' = \{x \in N : g(x) \in M\}$

Definice. *Nechť* f *je funkce a* J *je interval. Řekneme, že* f *je* prostá na J*, jestliže pro všechna* $x, y \in J$ *platí* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$*. Pro prostou funkci* $f : J \to \mathbb{R}$ *definujeme* funkci inverzní $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$ *předpisem* $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$*.*

4.2. Elementární funkce

Po trochu suchých definicích si pořádně zaveďme "běžné" – tzv. *elementární* – funkce. Zatím jsme si nedefinovali limitu funkce ani spojitost, tyto body zatím prosím chápejte intuitivně (a vraťte se k nim, až limity a spojitost probereme).

Věta 1 (zavedení exponenciály)**.** *Existuje právě jedna funkce* exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

1. $\exp(x)$ *je rostoucí na* $\mathbb{R}$ *,*
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$*,*
3. $\exp(0) = 1$*,*
4. $H_{\exp} = (0, \infty)$*,*
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$*.*

Definice. *Funkci inverzní k exponenciále* exp *nazýváme* logaritmus log.

Věta 13 (vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* log *splňuje:*

1. $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *je spojitá rostoucí funkce,*
2. $\forall x, y > 0 \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y)$*,*
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1$*.*

Definice. *Nechť* $a > 0$ *a* $b \in \mathbb{R}$*. Pak definujeme* $a^b = \exp(b \log(a))$*. Je-li* $b > 0$ *pak definujeme* $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$*.*

Poznámka. *(1) Umocňování má všechny "očekávané" vlastnosti, tj. např.* $\log(a^b) = b \log a$*,* $a^{bc} = (a^b)^c$*,* $a^{b+c} = a^b a^c$*,* $a^0 = 1$ *(vše pro* $a > 0$*, jinak obecnou mocninu nemáme definovanou). (2) Označíme-li* $e = exp(1)$*, pak* $\log e = 1$ *a podle definice je* $e^x = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$*. Číslo* $e \doteq 2.718\,281\,828\ldots$ *se nazývá Eulerovo číslo. Kromě tohoto vztahu s exponenciálou je e také hodnota limity*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Věta 14 (zavedení sinu a cosinu)**.** *Existují funkce* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$*,*
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$*,*
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x$*,*
2. *existuje kladné číslo* π *tak, že* sin *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$ *a* $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$*,*
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*.*

Funkce sin *a* cos *(a číslo* π*) jsou těmito vztahy určeny jednoznačně.*

Poznámka. *Odsud již plynou všechny ostatní vlastnosti funkcí sinus a cosinus, tj. např. vzorec pro* $\sin(2x)$, $\cos x/2$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, *atd.*

Definice. *Pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$ *a* $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *definujeme funkce* tangens *a* cotangens *předpisem*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \text{ a } \ \operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta 15 (spojitost sinu a cosinu)**.** *Funkce* sin, cos, tg *a* cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*

Definice. *Nechť*

$$\begin{aligned} \sin^* x &= \sin x \ \text{ pro } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \\ \cos^* x &= \cos x \ \text{ pro } x \in [0, \pi], \\ \operatorname{tg}^* x &= \operatorname{tg} x \ \text{ pro } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \ \text{ a} \\ \operatorname{cotg}^* x &= \operatorname{cotg} x \ \text{ pro } x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Definujeme arcsin *(respektive* arccos, arctg, arccotg*) jako inverzní funkci k funkci* $\sin^*$ *(respektive* $\cos^*$, tg^*, cotg^**).*

Poznámka. *Asi jste si všimli, že věty jsou bez důkazů – vlastně jsme jen řekli, jak chceme, aby se elementarní funkce chovaly. Některé důkazy si časem ukážeme (některé až v letním semestru), zde jen pro zajímavost naznačme, jak se dělají:*

- *Položíme* $exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- *Vlastnosti logaritmu odvodíme z toho, že se jedná o inverzní funkci k* exp.
- *Položíme* $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ *a* $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. *(Zde vybočujeme z rámce zkoumání funkcí (řad, ...) s reálnými hodnotami, ovšem pro komplexní čísla většina toho, co jsme si na přednášce říkali, platí beze změny.)*
- *Poznamenejme, že obdobně se definují tzv. hyperbolické funkce sinus hyperbolický a cosinus hyperbolický.* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *a* $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. *(Tyto funkce se nazývají hyperbolické neboť se k rovnoosé hyperbole* $(x \mapsto 1/x)$ *mají tak, jak goniometrické funkce (sinus a spol.) ke kružnici.*

Poznámka. *Lze vytvářet (např. pomocí integrálů) i další významné funkce "méně elementární", tzv.* speciální funkce. *Takovými funkcemi se zabývat nebudeme (už proto, že zatím nevíme, co je integrál), ale v principu se s nimi zachází stejně jako se sinem a spol: pomocí metod, které brzy vybudujeme, zjistíme vlastnosti těchto funkcí a naučíme kalkulačky/počítače jak takovou funkci spočítat numericky. Zmiňme např. tzv. chybovou funkci, která je důležitá mj. ve statistice:*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt\,.$$