

## 6. cvičení z MA — 1. a 2.4.2009

(papír s nápisem 5. cvičení není)

### Určitý integrál

Určitý integrál  $\int_a^b f(x) dx$  se definuje jako  $F(b_-) - F(a_+)$ , kde  $F$  je primitivní funkce a značky  $-$ ,  $+$  značí limitu zleva, zprava. Zápís:

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = F(b_-) - F(a_+) = \lim_{x \rightarrow b_-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a_+} F(x).$$

**Per partes pro určitý integrál:**  $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$

**Substituce pro určitý integrál:**  $\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x) dx$$

1.

(a)  $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$

(b)  $\int_0^1 \cos^3 x \sin x dx$

(c)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

### Aplikace integrálů

**Plocha pod křivkou**  $y = f(x)$  (pro  $x \in [a, b]$ ) má obsah  $\int_a^b f(x) dx$ . Je-li křivka dána parametricky  $y = \psi(t)$ ,  $x = \phi(t)$ , pro  $t \in [a, b]$  pak je plocha pod touto křivkou  $\int_a^b \psi(t)\phi'(t) dt$ . Pro křivku danou v polárních souřadnicích  $r = r(\phi)$ , ( $\phi \in [\alpha, \beta]$ ) je plocha 'mezi křivkou a středem souřadnic' rovna  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\phi) d\phi$ .

2. Spočtěte obsah

(a) obdélníku,

(b) trojúhelníku,

(c) kruhu,

(d) elipsy,

(e) plochy pod sinusovkou na  $[0, \pi]$ .

(f) plochy sevřené křivkami  $y = 1/x$ ,  $y = 1/x^2$  a  $x = 2$ .

3. Spočtěte  $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$  a  $\int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx$ . (Jaký význam mají tyto integrály ve fyzice, jmenovitě při zkoumání střídavého proudu? Pokud si nepamätujete jak se počítá se střídavým proudem, zeptejte se kamaráda fyzika :-)

**Délka křivky**  $y = f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) je  $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ . Délka křivky dané parametricky  $y = \psi(t)$ ,  $x = \phi(t)$ , pro  $t \in [a, b]$  je  $\int_a^b \sqrt{\psi'(t)^2 + \phi'(t)^2} dt$ . Pro křivku danou v polárních souřadnicích  $r = r(\phi)$ , ( $\phi \in [\alpha, \beta]$ ) je její délka  $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2(\phi) + r^2(\phi)} d\phi$ .

4. Určete

(a) obvod kružnice,

(b) délku křivky  $x^{3/2}$  pro  $x \in [0, a]$ ,

(c) délku křivky  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \log x$  pro  $x \in [1, e]$

**Objem tělesa** vzniklého rotací křivky  $y = f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) kolem osy  $x$  je  $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ . (Pro parametricky danou křivku zkuste vzorec odvodit sami pomocí věty o substituci.)

5. Určete objem

- (a) válce,
- (b) kužele,
- (c) koule,
- (d) anuloidu,
- (e) nekonečného “trychtýře” vzniklého rotací funkce  $f(x) = 1/x$  pro  $x \in [1, \infty)$  kolem osy  $x$ .
- (f) vzniklé rotací funkce  $y = \sqrt[3]{x}$  pro  $y \in [1, 2]$  kolem osy  $y$ .
- (g) \*  $n$ -rozměrné koule

**Povrch tělesa** vzniklého rotací křivky  $y = f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) kolem osy  $x$  je  $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ . (Pro parametricky danou křivku zkuste vzorec odvodit sami pomocí věty o substituci.)

6. Určete povrch

- (a) válce,
- (b) kužele,
- (c) koule,
- (d) paraboloidu (satelitní antény) vzniklé rotací křivky  $y = c\sqrt{x}$  pro  $x \in [0, b]$ . (Reálné parametry by mohly být  $b = 0.3m$ ,  $c = 1.8m^{1/2}$ .)
- (e) anuloidu (duše od pneumatiky) vzniklé rotací kružnice o poloměru  $r$  kolem osy procházející rovinou kružnice a vzdálené  $R$  od jejího středu. (Zkuste si spočítat pro duši z kola.)
- (f) jednodílného hyperboloidu (chladicí věž elektrárny) daného rovnicí  $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 - (\frac{z}{c})^2 = 1$ . (U Temelína je patní průměr 130.7m, průměr v koruně 82.6 m, výška 155 m. Dost jistě je  $a = b$ ,  $c$  už lze dopočítat.)
- (g) nekonečného “trychtýře” vzniklého rotací funkce  $f(x) = 1/x$  pro  $x \in [1, \infty)$  kolem osy  $x$ .

**Odhady sum a řad a další**

7. Zjistěte (pomocí integrálního kritéria), zda následující řady konvergují ( $a$  je reálný parametr)

- (a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ ,
- (b)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^a}$

8. Odhadněte (pomocí integrálu) velikost  $n!$ . (Tip: logaritmus je užitečný ...)

9. Spočtěte  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ . (Nepočítejte, ale podívejte se:  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .)

**Hezké útvary**

10. *Cykloida* je křivka, která vznikne, když valíme kružnici (poloměru  $r$ ) po přímce a sledujeme dráhu jednoho bodu (který je na začátku a na konci bodem dotyku kružnice a přímky).

- (a) Ověřte, že cykloida má rovnice (pro  $\alpha \in [0, 2\pi]$ )

$$x(\alpha) = r\alpha - r \sin \alpha$$

$$y(\alpha) = r - r \cos \alpha$$

- (b) Spočtěte její délku.

- (c) Spočtěte plochu pod křivkou.

11. *Astroida* je křivka zadaná rovnicí  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ . Určete její délku.

12. *Kardioda – srdcovka* – je druh *epicykloidy* (křivky, kterou opiše bod na kružnici, která se valí okolo jiné kružnice). V tomto případě jsou obě kružnice stejně velké.

- (a) V polárních souřadnicích je rovnice srdcovky  $r(t) = a(1 - \sin t)$ .
  - (b) Určete plochu uvnitř srdcovky.
  - (c) Určete její délku.
  - (d) Určete plochu vně srdcovky  $r(t) = 1 + \sin t$  a zároveň uvnitř kruhu  $r(t) = 3 \sin t$
- (Pozn.: srdcovka se často vyskytuje v Mandelbrotově množině.)

**Guldinovo pravidlo pro objemy** Objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinné množiny  $M$  kolem přímky  $p$ , neprotínající množinu  $M$ , je rovna součinu obsahu množiny  $M$  a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny  $M$  od  $p$ .

**Guldinovo pravidlo pro povrchy** Plocha rotační plochy vytvořené rotací rovinné křivky  $\phi$  kolem přímky  $p$  je rovna součinu délky křivky  $\phi$  a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky  $\phi$  od  $p$ .

**13.** Aplikujte na

- (a) válec,
- (b) anuloid,
- (c) kužel,
- (d) kouli.

**14.** Zamyslete se, proč to asi platí.