

4. cvičení z MA — 18. a 19.3.2009

Primitivní funkce alias neurčité integrály

Převod na racionální funkce

Některé integrály lze převést na integraci racionálních funkcí. V následující tabulce značí $r(x, y)$ racionální funkci dvou proměnných s výjimkou posledních dvou řádků, kde r závisí na jedné proměnné.

typ integrálu	doporučená substituce
$\int r(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$	$y = \phi(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
$\int r(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, a > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + y$
$\int r(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + yx$
$\int r(\sin x, \cos x) dx, \quad r$ lichá v sinech	$y = \phi(x) = \cos x$
$\int r(\sin x, \cos x) dx, \quad r$ lichá v kosinech	$y = \phi(x) = \sin x$
$\int r(\sin x, \cos x) dx, \quad r$ sudá v sinech a kosinech	$y = \phi(x) = \operatorname{tg} x$
$\int r(\sin x, \cos x) dx$	$y = \phi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
$\int r(e^x) dx$	$y = \phi(x) = e^x$
$\int r(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$	$y = \phi(x) = \ln x$

1. (substituce)

- (a) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx,$
- (b) $\int \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} dx,$
- (c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx,$
- (d) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx,$
- (e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx,$
- (f) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx,$
- (g) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx,$
- (h) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} dx,$
- (i) $\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx,$
- (j) $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}} dx.$

2. (další substituce)

- (a) $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx,$
- (b) $\int \frac{1}{\sin x} dx,$
- (c) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx,$
- (d) $\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} dx,$
- (e) $\int \operatorname{tg}^3 x dx,$
- (f) $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx,$
- (g) $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx,$
- (h) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx,$
- (i) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx,$
- (j) $\int \frac{1}{x\sqrt{-\ln^2 x + 4 \ln x - 3}} dx.$

3. (složitější)

- (a) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \quad (t = x + 1/x),$
- (b) $\int \sin \log x dx,$
- (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}} dx \quad (x = a \cos^2 t + b \sin^2 t),$

- (d) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ ($x = \operatorname{tg} x$),
- (e) $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$ ($x = \operatorname{cosh} t$),
- (f) $\int \frac{\log \cos x}{\cos^2 x} dx$,
- (g) $\int \sqrt{e^x - 1} dx$,
- (h) $\int \frac{1}{\cos^3 x \sqrt{\sin 2x}} dx$,
- (i) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} dx$,
- (j) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

4. (lepení)

- (a) $\int |x| dx$,
- (b) $\int \max\{x, x^2\} dx$,
- (c) $\int \left| \sin x + \frac{1}{2} \right| dx$.