3. cvičení z MA — 11. a 12.3.2009

Primitivní funkce alias neurčité integrály

1. (per partes)
(a) $\int x^3 \ln x \,\mathrm{d}x$,
(b) $\int \sin^n x \,\mathrm{d}x$ (rekurentní formulí),
(c) $\int \cos^n x \,\mathrm{d}x$ (rekurentní formulí),
(d) $\int e^x x^n \,\mathrm{d}x$ (rekurentní formulí),
(e) $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$,
(f) $\int x \sin x \,\mathrm{d}x$,
(g) $\int x^a \ln x \,\mathrm{d}x$ (kde $a > 0$),
(h) $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$,
(i) $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$,
(j) $\int x^2/e^x \,\mathrm{d}x$,
(k) $\int \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$.

2. (trochu těžší)
(a) $\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$.
(b) $\int \operatorname{cotg}^2 x \,\mathrm{d}x$.
(c) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \,\mathrm{d}x$.

3. Rozmyslete si, jak vypadá graf f', resp. F, je-li dán graf f.
Vyšetřete, jaké vlastnosti musí mít primitivní funkce k funkci f, která je lichá, sudá, omezená, periodická, neklesající, nezáporná.

Racionální funkce

Racionální funkce převedeme na parciální zlomky. S těmi pak naložíme podle následujícího návodu.

integrand	primitivní funkce
$\frac{1}{x-\alpha}$	$\ln\lvert x-\alpha\rvert$
$\frac{1}{(x-\alpha)^k}; k > 1$	$\frac{1}{-k+1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln\lvert x^2+px+q\rvert$
$\frac{1}{x^2+px+q}$	$\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}; k > 1$	$\frac{1}{k+1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k+1}}$
$\frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}; k > 1$	$\frac{1}{2k}\left(\frac{x}{(1+x^2)^k} + (2k-1)\int\frac{1}{(1+x^2)^k}\right)$

4.
(a) $\int \frac{3x+5}{2x^2+3x+7} \,\mathrm{d}x$,
(b) $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1} \,\mathrm{d}x$,
(c) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} \,\mathrm{d}x$,
(d) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} \,\mathrm{d}x$,
(e) $\int \frac{x}{x^3-3x+2} \,\mathrm{d}x$,
(f) $\int \frac{x}{x^3-1} \,\mathrm{d}x$,
(g) $\int \frac{1}{x^6+1} \,\mathrm{d}x$,
(h) $\int \frac{x}{2x^2-3x-2} \,\mathrm{d}x$,
(i) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} \,\mathrm{d}x$,
(j) $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} \,\mathrm{d}x$.