

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad

Cv. 12.1 Otestujte pozitivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Cv. 12.2 Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou pozitivně semidefinitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.3 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.4 Spočítejte Choleského rozklad matice A a použijte ho k řešení soustavy $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ -32 \\ 26 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.5 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 13 & -13 & 9 \\ 5 & -13 & 42 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.6 Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně semidefinitní matice je pozitivně semidefinitní matice.

Cv. 12.7 Buď A pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $x^T Ax = 0$ pro nějaké $x \neq 0$ implikuje $Ax = 0$.