11. Positivně (semi-)definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Cv. 11.2 Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cv. 11.3 Ukažte, že $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická positivně definitní právě tehdy, když zobrazení $\langle x, y\rangle_A := x^T Ay$ představuje skalární součin.

Cv. 11.4 Ukažte, že matice

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je symetrická positivně definitní, a to pomocí tvrzení z předchozí úlohy.

Cv. 11.5 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.