**DISKRÉTNÍ MATEMATIKA**
**Vánoční sada 2014**

Toto je poslední sada úkolů, každý příklad je za 2 body (+ případný bonus). Několik důležitých poznámek:

- zadání si pozorně přečtěte, svoje tvrzení vždy zdůvodňujte!!
- **pozor změna!!! za tyto příklady dávám všechno anebo nic - neúplné a nedokončené úkoly nebudou za půl bodu a pod., ale budu je vracet k dopracování**
- sada nemá oficiální deadline
- odevzdávat můžete jako vždy - na posledním cviku v lednu / mailem / nechat řešení u mně v kanclu na malé straně
- 24. ledna - 2. února 2015 nebudu v Praze
- na přečtení a opravení úkolu si vyhrazuji 3 dny (tedy pokud mi úkol pošlete do půlnoci v úterý, odpovím vám do půlnoci v pátek)
- doporučuji vyřešit o něco víc příkladů než kolik potřebujete bodů a taky mít nějakou časovou rezervu na případné dořešení neúplných řešení ;)

Veselé Vánoce :-O a hodně zábavy při řešení !! :)

**1. Prázdné a neprázdné mocniny.** Dokažte, že když vezmu relaci $<$ (tranzitivní, silně antisymetrická relace) pro nosnou množinu $\{1, 2, 3, \ldots k\}$, pak existuje konečné $n$, že $R^n$ už bude prázdná relace. (* 1 b.) Najděte relaci (libovolnou), pro kterou jsou $R^n$ pro všechna $n$ neprázdné.

**2. O uspořádáních.** Dokažte, že každé konečné částečné uspořádání lze napsat jako průnik konečně mnoha lineárních uspořádání.

**3. Skóre stromu.** Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, d_2, \ldots d_n)$ je skóre stromu.

**4. Automorfismy stromu.** Dokažte, že každý automorfismus stromu fixuje vrchol nebo hranu (tzn. buď existuje $v$ t.ž. $f(v) = v$, nebo existuje $uv \in E$ t.ž. $f(u) = v$ a $f(v) = u$).

**5. Regulární bipartitní graf.** Mějme regulární bipartitní graf $G = (X \cup Y, E)$ s partitami $X, Y$. Jak moc se mohou od sebe lišit velikosti jeho partit $|X|, |Y|$?

**6.** 0 **nebo** 5. Nechť $G$ je souvislý graf, v němž každé dva různé vrcholy $u, v$ mají buď 0 nebo 5 společných vrcholů. Dokažte, že pak je $G$ nutně $k$-regulární (pro nějaké $k$).

**7. Barevnost a nezavislé množiny.** Dokažte užitečné tvrzení:

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

($\chi(G)$ je barevnost grafu $G$, $\alpha(G)$ velikost největší nezávislé množiny v $G$.)

**8. Souvislost.** Buď $G$ graf na $n$ vrcholech s $m > \binom{n-1}{k}$ hranami. Ukažte, že je souvislý.

**9. Nejdelší cesty.** Dokažte, že každé dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol.

**10. Barevnost duálu.** Ukažte, že má-li rovinný graf všechny stupně sudé, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma. (Duální graf rovinného grafu $G$ je graf $G^*$, jehož vrcholy odpovídají stěnám grafu G a hrany vedou mezi každou dvojicí stěn, které sdílejí společnou hranu.)

**11. (Anti)řetězce.** Najděte délku maximálního řetězce a antiřetězce na uspořádání $(P(\{1, 2 \ldots, n\}), \subseteq)$. (Pro důkaz, že vámi nalezené (anti)řetězce jsou opravdu maximální, se může hodit Dilworthova věta.)

email: mikina@kam.mff.cuni.cz, url: http://kam.mff.cuni.cz/~mikina/.