

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
Písemka 10. 12. 2014

Zadání si pozorně přečtete, svoje tvrzení vždy zdůvodněte. Pokud se odvoláváte na známou rovnost nebo vztah, jasně je formulujte.

Získatelných bodů je víc než oficiálních 30, proto nestresujte, nic se neděje když nestihnete vyřešit všechny úkoly ;)

1. Maximální a minimální prvky. [3 body]

Najděte uspořádání na pěti prvcích, které má 3 maximální a 3 minimální prvky, anebo dokažte, že takové neexistuje.

Toto uspořádání můžete definovat libovolným vám vyhovujícím způsobem (grafem, vyjmenováním prvků které jsou v relaci, ...)

2. Částečné uspořádání. [5 bodů]

Dokažte, že průnik konečně mnoha částečných uspořádání (trazitivní, silně antisymetrická relace) je zase částečné uspořádání.

3. Identita. [5 bodů za 1. důkaz + 3 body za každý další důkaz]

Dokažte následující identitu. Pokud ji dokážete různými způsoby.

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}$$

4. Různé cesty. [4 + 1 bodů]

Máme obdélník vystříhnutý ze čtverečkovaného papíru, který má rozměry $m \times n$ čtverečků a jeho hrany jsou přesně čáry papíru. Jeho levý dolní roh označíme A , pravý horní B . Kolik různých cest vedoucích jenom po linkách papíru existuje z vrcholu A do vrcholu B ? Pohybovat se můžete jenom doprava nebo nahoru, smíte kráčet i po hranách samotného obdélníku.

Kolik by bylo cest, kdybychom si dovolili jít všemi směry a dovolili i procházet po jednotlivých linkách více krát?

5. Ovoce. [5 bodů]

Prodavačka chce dát do výkladu 4 pomeranče, 3 hrušky a 2 granátová jablka. Ovoce pečlivě vybírala a každý kus je jiný (záleží tedy na tom, který pomeranč/hruška/jablko je které). Kolik možností rozestavení ovoce do řady prodavačka má, nechce-li aby stejný druh ovoce byl vedle sebe?

6. Graf se stupni 3 a 5. [3 body]

G je graf na 8 vrcholech s 15 hranami a každý vrchol má stupeň 3 nebo 5. Kolik má G vrcholů stupně 5?

7. Kružnice a její doplněk. [3 body]

Pro která $n \in \mathbb{N}$ je C_n isomorfní se svým doplněkem?

8. Počet koster. [4 body]

Kolik koster má K_4 (t.j. úplný graf na 4 vrcholech)?