

**DISKRÉTNÍ MATEMATIKA**  
**Cvičení 15.10.2013**

**O dělitelnosti.** Rozmyslete si že relace dělitelnosti na  $\mathbb{N}$  je ČUM, nakreslete její Hasseho diagram pro  $n = 10$  a nalezněte její největší/nejmenší/maximální/minimální prvek, či si rozmyslete, že neexistuje.

Jak vypadá supremum a infimum takové relace?

**Definice 1** (Vnoření uspořádání). Necht'  $(X, \leq)$  a  $(Y, \preceq)$  jsou uspořádané množiny. Zobrazení  $f: X \rightarrow Y$  nazýváme vnoření  $(X, \leq)$  do  $(Y, \preceq)$ , jestliže platí:

- (i)  $f$  je prosté
- (ii)  $f(x) \preceq f(y)$  pro každé  $x \leq y$
- (iii) jestliže  $f(x) \preceq f(y)$ , potom i  $x \leq y$

**Lexikografické uspořádání  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  vnořeno do  $\mathbb{Q}$ .**

(a) Popište nějaké vnoření množiny  $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$  s lexikografickým uspořádáním do uspořádané množiny  $(\mathbb{Q}, \leq)$ , kde  $\leq$  je obvyklé uspořádání podle velikosti.

(b) Popište vnoření  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  s lexikografickým uspořádáním do  $(\mathbb{Q}, \leq)$ .

**Vnoření ještě jednou.** Dokažte, že pro každou uspořádanou množinu  $(X, \preceq)$  existuje vnoření do uspořádané množiny  $(2^X, \subseteq)$

**Dlouhý a ne-příliš zajímavý.** Které z těchto relací na množině  $\mathbb{N}^2$  jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

- (a)  $\leq_A: (a, b) \leq_A (c, d)$  právě když  $a \leq c$  a zároveň  $b \leq d$
- (b)  $\leq_B: (a, b) \leq_B (c, d)$  právě když  $a \leq c$  nebo  $b \leq d$
- (c)  $\leq_C: (a, b) \leq_C (c, d)$  právě když  $a < c$  nebo  $(a = c$  a zároveň  $b \leq d)$
- (d)  $\leq_D: (a, b) \leq_D (c, d)$  právě když  $a \leq c$  a zároveň  $b \geq d$