$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$

střední hodnota

Linearita: $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}[\alpha \cdot X] = \alpha \cdot \mathbb{E}[X]$

① $\Omega = \{0,1\}^n$ $X :=$ #1 v posloupnosti

$X_i := \begin{cases} 0 \\ 1 & \text{pokud na } i\text{-té pozici je } 1 \end{cases}$

$X_1 - X_n$

$X = \sum_i X_i$

$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = n \cdot \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Obecně: náh. jevy $\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_n$

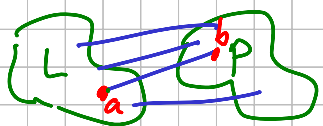
$X :=$ # jevů, které nastaly

X_i ... indikátor jevu $\mathcal{J}_i$ $X_i = \begin{cases} 0 \\ 1 & \text{nastal-li jev } \mathcal{J}_i \end{cases}$

$\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}[\mathcal{J}_i]$

$\mathbb{E}[\mathcal{J}_i] = 0 \cdot P(\overline{\mathcal{J}_i}) + 1 \cdot P(\mathcal{J}_i) = P(\mathcal{J}_i)$

② Řezy v grafu $G = (V, E)$



$L \cup P = V$

$L \cap P = \emptyset$

$X :=$ # hran "zleva doprava"

$\# e \in E : |e \cap L| = 1$ & $|e \cap P| = 1$

Pokud pro $\forall v \in V$ zvolíme náhodně $x \in L$

$X_e := \begin{cases} 0 \\ 1 & \text{pokud } e \text{ vede zleva doprava} \end{cases}$

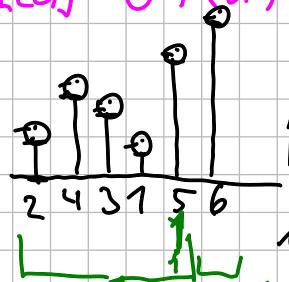
pro $e \in E$

$X = \sum_e X_e$ $\mathbb{E}(X_e) = P[e \text{ vede napříč}] = 1/2$

$\mathbb{E}(X) := \sum_e \mathbb{E}(X_e) = |E|/2$

Důsledek: $\exists (L, P)$ t.ž. napříč vede aspoň $|E|/2$ hran

Neboli: v grafu existuje bipartitní podgraf s aspoň $|E|/2$ hranami



lidí, kteří vidí dopředu

permutace π na $\{1 - n\}$

i vidí $= \forall j < i : \pi(j) < \pi(i)$

levá maxima

$X :=$ # levých maxim

$\mathbb{E}(X)$ přes náhodnou volbu π

$X_i = \begin{cases} 0 \\ 1 & i \text{ je levé max.} \end{cases}$

zvolíme i

Volba π:
- vybereme podmnožinu, která bude nalevo
- permutace nalevo
- perm. napravo

$P(X_i = 1) = \frac{1}{i}$

$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{i}$

$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ n-té harmonické číslo H_n

Platí: $\ln n \le H_n \le (\ln n) + 1$

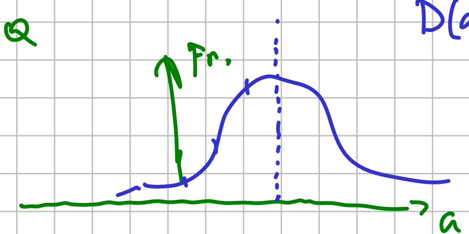
Rozdělení náh. veličiny X

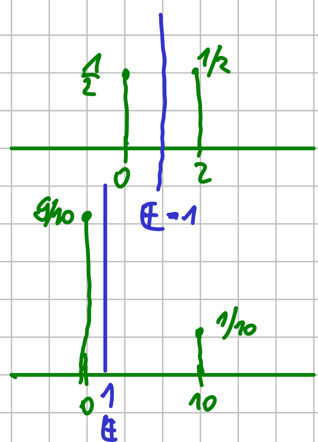
$Q : \mathbb{R} \to [0,1]$

$Q(a) := P[X = a] = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = a}} P(\omega)$

Pro spojité prostory: distribuční funkce

$D(a) := P[X \le a]$

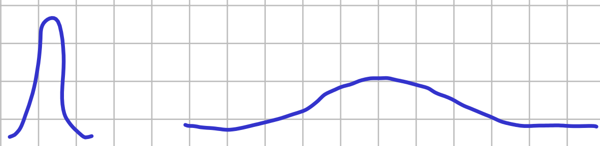




$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$

$= \sum_{a \in \mathbb{R}} \underbrace{\left(\sum_{\substack{\omega \\ X(\omega) = a}} a \, P(\omega) \right)}_{a \cdot P[X = a]}$

$\leadsto$ rozptyl ...



Věta (Markovova nerovnost):

Je-li X nezáporná náhodná veličina a $k>0$

Pak $P[X \geq k\cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{k}$.

Dk: $\mathbb{E}[X] = \sum_{a\in\mathbb{R}} a\cdot P[X=a] = \underbrace{\sum_{a<t} a\cdot P[X=a]}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{a\geq t} a\cdot P[X=a]}_{\geq \sum_{a\geq t} t\cdot P[X=a]}$

zvolíme t libovolně $t>0$

$\geq 0 + \sum_{a\geq t} t\cdot P[X=a] = t\cdot \underbrace{\sum_{a\geq t} P[X=a]}_{P[X\geq t]}$

$\mathbb{E}[X] \geq t\cdot P[X\geq t]$

$\frac{\mathbb{E}[X]}{t} \geq P[X\geq t]$

Stačí zvolit $t := k\cdot \mathbb{E}[X]$.

Co když chceme velký ~~řez~~ najít? $\frac{1}{2}-\varepsilon$

- přiřadíme vrcholy náhodně do L, P
- spočítáme hrany napříč
- pokud jich je málo $\Rightarrow$ znovu!

Chceme řez velikosti aspoň $\frac{49}{100}\cdot|E|$ ... kdy se to nepovede?

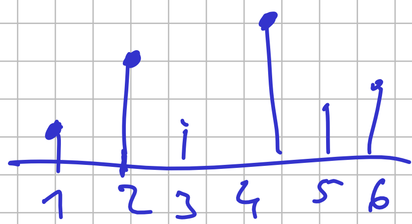
$P[\#\text{ hran napříč} < \frac{49}{100}|E|]$

$= P[\underbrace{\#\text{ hran uvnitř } L,P}_{\mathbb{E} = \frac{1}{2}|E|} \geq \underbrace{\frac{51}{100}|E|}_{\frac{51}{50}\cdot\mathbb{E}}] \leq \frac{50}{51}$

$P[\text{uspějeme}] \geq 1-\frac{50}{51} = \frac{1}{51}$ .... průměrně stačí 51 pokusů

Posloupnost $x_1 \ldots x_n$ různých čísel.

Chceme najít "dlouhou" rostoucí nebo klesající podposloupnost.



Věta (Erdősova-Szekeresova):

V každé posloupnosti n^2+1 různých čísel existuje monotónní podposl. délky $n+1$.

Dk: pomocí relací ...

Df. $\preceq$ na $\{1 \ldots n^2+1\}$ t.ž. $i \preceq j \equiv i\leq j \;\&\; x_i \leq x_j$

$\preceq$ je uspořádání (částečné)

řetězce $\Leftrightarrow$ rostoucí podposl.

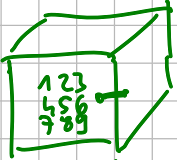
antiřetězce $\Leftrightarrow$ klesající podposl.

Dlouhý & Široký: $\alpha\cdot\omega \geq n^2+1$

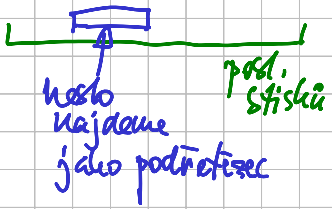
platí $\alpha \geq n+1$ nebo $\omega \geq n+1$

jinak $\alpha\cdot\omega \leq n^2$

Příklad: sejf



heslo délky k



posl. $x_1 — x_m \in \{0,1\}$ cyklická

t.ž. $\forall y \in \{0,1\}^k$ se vyskytuje jako podřetězec

zjevně $m \geq 2^k$ ... překvapivě: 2^k stačí!

→ de Bruijnova posl.

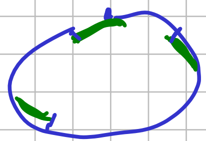
např. pro $k=2$: 0110 $\quad 4 = 2^2$

Jak ji najít? Sestrojíme orientovaný graf

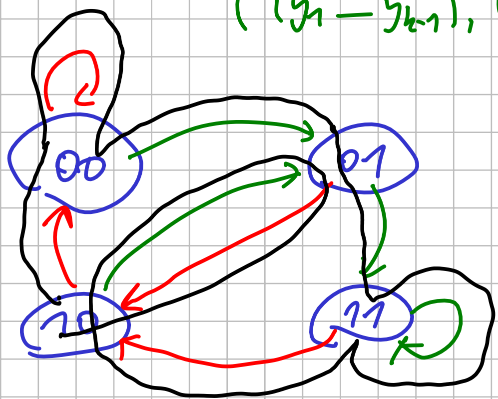
$V := \{0,1\}^{k-1}$

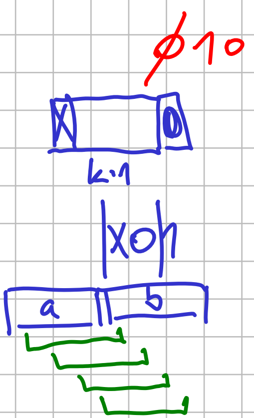
$E: \big((y_1 — y_{k-1}), (y_2 — y_{k-1}0)\big)$

$\big((y_1 — y_{k-1}), (y_2 — y_{k-1}1)\big)$



pro $k=3$:





graf je eulerovský: $\forall v\ \deg^{out}(v) = 2$

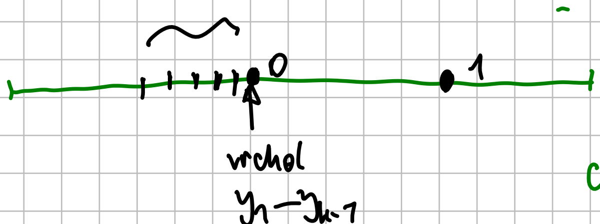
$\forall v\ \deg^{in}(v) = 2$

souvislý (silně)

$\Rightarrow \exists$ euler. tah (uzavřený)

00111010

hrany $y_1 — y_{k-1}$



posl. z eul. tahu

chceme najít k-tici $y_1 — y_k$ → vrchol $y_1 — y_{k-1}$

↓

je tam?