(TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI)

Pravděpodobnostní prostor

- Ω := množina elementárních jevů
- $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ množina jevů
  (lze definovat jako $\{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega)\}$)
- $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ pravděpodobnost

Příklady:

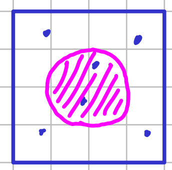
hod mincí
panna / orel
$\Omega = \{P, V\}$
$\{P\}$ $\{V\}$
$\{P,V\}$ $\emptyset$

hod kostkou
1, 2, 3, 4, 5, 6
$\Omega = \{1, \dots, 6\}$
$\{1\}$
$\{2,4,6\}$
$\{1,2,3\}$

3 hody mincí
$\Omega = \{PPP, PPV, \dots, VVV\}$
$\{PPP, PPV\}$

klasické

padá déšť na stoleček



$\Omega = [0,1]^2$

Df: Diskrétní pravděpodobnostní prostor:
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Ω: konečná nebo spočetná množina; $\mathcal{F}$: 2^{Ω}

$$P(J) = \sum_{\omega \in J} P(\{\omega\})$$

P jsou určeny pravd. elem. jevů

navíc $P(\Omega) = 1$

↳ konečný p.p. : Ω je konečná

↳ klasický p.p. : navíc všechny elem. jevy mají stejnou pp.

$$\Rightarrow P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|}$$

Příklad: ČČ MM ČM

- náhodná kartička náhodnou stranou nahoru
- horní strana je červená
- P[dolní strana je červená] = ?

Jak vypadá Ω? $\{Č\underline{Č}, \underline{Č}Č, MM, M\underline{M}, \underline{Č}M, Č\underline{M}\}$

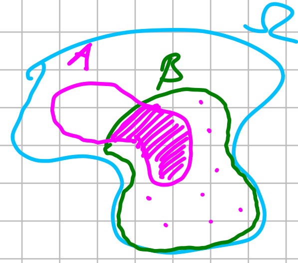
$P(\omega) = 1/6$ pro $\omega \in \Omega$

↳ odpověď je 2/3 !

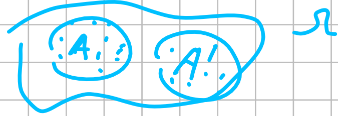
Bertrandův paradox

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$P(B) = \frac{1}{2}$
$P[A/B] = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

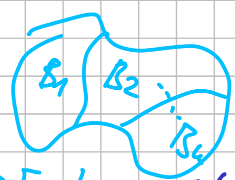
Df: Pro jevy A, B t.ž. $P(B) \neq 0$
def. podmíněnou pravděpodobnost $P[A/B] := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



Pokud $A \cap A' = \emptyset$, pak $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$
disj. jevy



Obecně: $P(A \cup A') = P(A) + P(A') - P(A \cap A')$



Věta (O úplné pravděpodobnosti): Pro $A \subseteq \Omega$, $B_1 \dots B_k$ rozklad Ω t.ž. $\forall i\; P(B_i) \neq 0$

$$P(A) = \sum_i P[A/B_i] \cdot P(B_i)$$

$P[A/B_i] = \dfrac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)}$

$P[A/B_i] \cdot P(B_i) = P(A \cap B_i)$

$P[\text{positivní} \mid \text{nemocný}]$	0.95	0.95
$P[\text{positivní} \mid \text{zdravý}]$	0.03	0.03
$P[\text{nemocný}]$	0.06	0.001
$P[\text{positivní}]$	0.0852	$\doteq 0.0309$
$P[\text{nemocný} \mid \text{positivní}]$	$\doteq 0.67$	$\doteq 0.0307$

$$P[A/B] \rightarrow P[B/A]$$

$$P[A/B] = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P[B/A] = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P[B/A] = \frac{P[A/B]\cdot P(B)}{P(A)}$$

$$P[T] = P[T/N]\cdot P(N) + P[T/\bar N]\cdot P(\bar N) = 0.95\cdot 0.06 + 0.03\cdot 0.94$$

$$P[N/T] = \frac{P[T/N]\cdot P(N)}{P(T)} = \frac{0.95 \cdot 0.06}{0.0852}$$

Věta (Bayesova): Pro $A \subseteq \Omega$ a $B_1 - B_k$ rozklad Ω t.ž. $\forall i\ P(B_i) \neq 0$

$$P[B_i \mid A] = \frac{P[A \mid B_i]\cdot P(B_i)}{\underbrace{\sum_j P[A \mid B_j]\cdot P(B_j)}_{P(A)}}$$

Df: Jevy A, B jsou nezávislé

$$\equiv P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

$$P(A\cap B) = P[A/B]\cdot P(B)$$

$$P(A)\cdot P(B)$$

$P(A) = P[A/B]$ nebo $P(B) = 0$ $\Leftrightarrow$ A, B jsou nezávislé

kostka

S = "padlo sudé číslo"

R = "padlo prvočíslo"

$P(S) = 1/2 \quad \{2,4,6\}$

$P(R) = 1/2 \quad \{2,3,5\}$

$$P[R/S] = \frac{P(R\cap S)}{P(S)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Df: Jevy $A_1 - A_n$ jsou

- po dvou nezávislé $\equiv \forall i,j\ i\neq j$: A_i a A_j jsou nezávislé
- nezávislé $\equiv \forall I \subseteq \{1-n\}, I \neq \emptyset$: $P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$.

Příklad: $\Omega = \{0,1\}^4$, pr. klasická $(P(\omega) = 1/16)$

A := "první dva bity jsou 1" $\quad P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

B := "poslední dva bity jsou 1" $\quad P(B) = \frac{1}{4}$

C := "sudý #1" $\quad P(C) = \frac{1}{2}$

Nz

11 11

A B

11 00

11 11

11 11

$$P(A\cap B) = \frac{1}{16} = P(A)\cdot P(B)$$

$$P(A\cap C) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = P(A)\cdot P(C)$$

$P(B\cap C)$ sym.

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{16} \neq \underbrace{P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)}_{1/32}$$

A, B, C jsou po 2 nezávislé, ale nejsou nezávislé.

1 2

Příklad: 32 karet $\{1 \_\_ 32\}$ náhodně zamícháme

Ω = permutace na $\{1 \_\_ 32\}$

P klasická: $P(\omega) = 1/32!$

$A := \{\pi \in \Omega \mid \pi(1) = 1\}$ ← na 1. místě je 1

$B := \{\pi \in \Omega \mid \pi(2) = 2\}$ ← na 2. místě je 2

$P(A) = 1/32$

$P(B) = 1/32$

$$P(A\cap B) = \frac{30!}{32!} = \frac{1}{32\cdot 31} \neq \frac{1}{32\cdot 32}$$

závislé

$$P[B/A] = 1/31 \neq P(B)$$

Příklad: $\{0,1\}^n$ jevy "na i-tém místě je 1" jsou nezávislé

$\mathcal{H}: \Omega = \{0,1\}$, $P(\omega) = 1/2$

$\mathcal{H}\times\mathcal{H}$: 00, 01, 10, 11 } pr. 1/4

$\mathcal{H}^n$

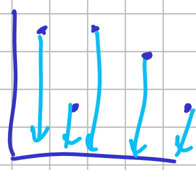
Součin pr. prostorů $(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1) \times (\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2)$

je $(\underbrace{\Omega_1\times\Omega_2}_{\Omega}, 2^{\Omega_1\times\Omega_2}, P)$

pro $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega$: $P(\{\omega_1,\omega_2\}) = P_1(\{\omega_1\})\cdot P_2(\{\omega_2\})$

$$\sum_{\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\Omega} P(\omega) = \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega} P_1(\omega_1)\cdot P_2(\omega_2) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1}\sum_{\omega_2\in\Omega_2} P_1(\omega_1)\cdot P_2(\omega_2)$$

$$= \underbrace{\sum_{\omega_1}\left(P_1(\omega_1)\cdot \underbrace{\sum_{\omega_2} P_2(\omega_2)}_{1}\right)}_{1} = 1$$



→ jevy "$\underbrace{\text{i-tá složka je } X}_{\text{projekce}}$" jsou nezávislé

Df: Náhodná veličina je funkce: $\Omega \to \mathbb{R}$.

Např: je-li X náh. veličina, pak $X>5$ je jev $\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)>5\}$ → $\Pr[X>5]$

Df: Střední hodnota náhodné veličiny X je

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot X(\omega).$$

pro klasický p.p. aritmetický průměr — obecně vážený průměr

$\sum$ může být nekonečná → nemusí konvergovat → pak X nemá $\mathbb{E}$

Příklady:

kostka … hodnota hodu

$\{0,1\}^n$ … #1, # souvislých úseků

$\underbrace{00}\underbrace{111}\underbrace{0}\underbrace{1}$

permutace na $\{1..n\}$ … # pevných bodů ($\#i: \pi(i)=i$)

→ K: $\mathbb{E}[K] := \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \dots + \frac{1}{6}\cdot 6$

$= \frac{1+2+\dots+6}{6} = \frac{6\cdot 7}{2\cdot 6} = 3.5$

$\mathbb{E} \neq$ medián

m: $P[X>m] \le \frac{1}{2}$, $P[X<m] \le \frac{1}{2}$

1/2 | 1/2

př: Většina lidí má nadprůměrný # rukou :-)

$\mathbb{E}[\#\text{rukou}] < 2$

$P[\#\text{rukou} > \mathbb{E}[\#\text{rukou}]] = 1-\varepsilon$

Věta (o linearitě střední hodnoty): $\forall X,Y$ náhodné veličiny, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$
$$\mathbb{E}[\alpha\cdot X] = \alpha\cdot\mathbb{E}[X]$$

Dk: $\mathbb{E}[\alpha\cdot X] = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\cdot \underbrace{(\alpha\cdot X)(\omega)}_{\alpha\cdot X(\omega)} = \alpha\cdot \underbrace{\sum_{\omega} P(\omega)\cdot X(\omega)}_{\mathbb{E}[X]}$

$\mathbb{E}[X+Y] = \underbrace{\sum_{\omega} P(\omega)\,\underbrace{(X+Y)(\omega)}_{X(\omega)+Y(\omega)}}_{P(\omega)\cdot X(\omega) + P(\omega)\cdot Y(\omega)} = \underbrace{\left(\sum_{\omega} P(\omega)\cdot X(\omega)\right)}_{\mathbb{E}[X]} + \underbrace{\left(\sum_{\omega} P(\omega)\cdot Y(\omega)\right)}_{\mathbb{E}[Y]}$