Barvení grafů

Df: Obarvení grafu G k barvami (k-obarvení) je $c: V(G) \to \{1 \ldots k\}$ t.ž. kdykoli $\{x,y\} \in E(G)$, pak $c(x) \neq c(y)$.

Df: Barevnost $\chi(G)$ grafu G := $\min k : \exists$ k-obarvení grafu G

↑ chromatické číslo

👁 Pokud $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$

Pokud G obsahuje lichou kružnici, pak $\chi(G) \geq 3$

Df: klikovost $\omega(G)$ grafu G := max. k : $\exists H \subseteq G$, $H \cong K_k$.

👁 $\chi(G) \geq \omega(G)$

Věta: $\chi(G) \leq 2 \Leftrightarrow G$ neobsahuje lichou kružnici

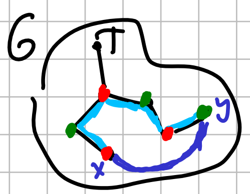
Dk: $\Rightarrow$ už víme

$\Leftarrow$ barvíme po komponentách ... BÚNO G souvislý

nechť T je nějaká kostra grafu G

$\exists c: V(T) \to \{1,2\}$ 2-obarvení T

↯ je též 2-obarvení celého G



Nechť $\{x,y\} \in E(G) \setminus E(T)$.

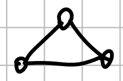
Pokud by byla $c(x) = c(y)$, pak cesta v kostře mezi x,y má sudý # hran

$\Rightarrow$ přidáním $\{x,y\}$ k cestě vznikne lichá kružnice v G

↯

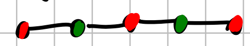
Graf bez hran $\Leftrightarrow \chi(E_n) = 1$

Úplné grafy



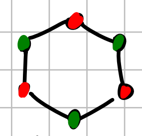
$\chi(K_n) = n$

Cesty

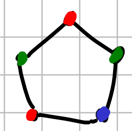


$\chi(P_n) = 2$ pro $n \geq 1$

Kružnice

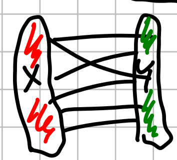


$\chi(C_{2k}) = 2$



$\chi(C_{2k+1}) = 3$

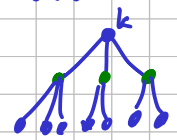
Bipartitní graf



$\chi(G) \leq 2$ ($\Leftrightarrow$) pro $|V(G)| \geq 2$

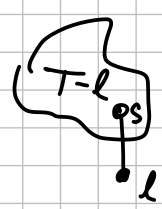
👁 Stromy mají $\chi \leq 2$.

buď:



barva je $1 + (d(k,v) \bmod 2)$

nebo indukcí:



pro $|V(T)| = 1$ triv.

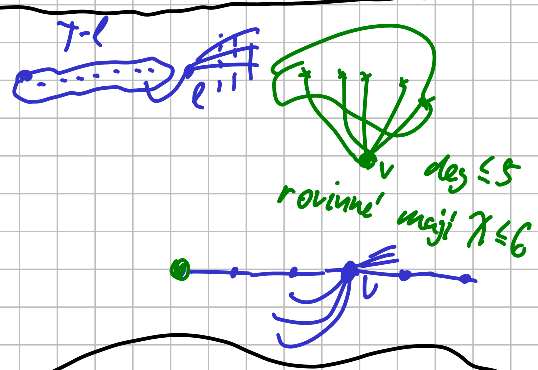
jinak: ℓ := list, s := soused listu

$T - \ell$ má 2-obarvení

↓ rozšíříme na 2-obarvení celého T

ℓ dostane barvu opačnou k barvě s

Df: Graf G je k-degenerovaný $\equiv$ $\exists$ lin. uspořádání $\prec$ na $V(G)$ t.ž. $\forall v \in V(G)$ $(\#u \in V(G) : u \prec v \ \& \ \{u,v\} \in E(G)) \leq k$.



deg ≤ 5

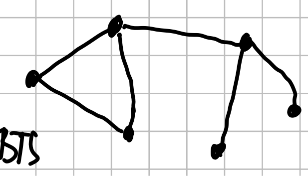
rovinné mají $\chi \leq 6$

👁
- Stromy jsou 1-degenerované $\quad \chi \leq 2$
- Rovinné jsou 5-degenerované $\quad \chi \leq 6$
- graf je Δ-degen. pro $\Delta := \max_{v \in V(G)} \deg(v)$ $\quad \chi \leq \Delta + 1$

Větička: Pokud G je k-degenerovaný, pak $\chi(G) \leq k+1$.

Dk: Barvíme v pořadí podle $\prec$, vždy máme 1 volnou barvu...

přidělování frekvencí



rozvrh hodin

přidělování poslucháren

vrcholy: Intervaly

hrany: $\{x,y\} : x \cap y \neq \emptyset$

Barevnost rovinných grafů

• už víme: $\chi \leq 6$

1852: hypotéza
1976: dokázáno

Věta (o 4 barvách): Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 4$.

Věta (o 5 barvách): ... $\chi(G) \leq 5$.

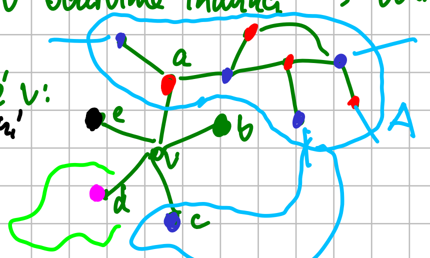
Dk #1 Indukce podle # vrcholů.

a) pokud $|V(G)| \leq 5 \Rightarrow$ hotovo.

b) ind. krok: zvolíme v: $\deg(v) \leq 5$.

$G' := G - v$ obarvíme indukcí → obarvení c'

Sousedé v: v nakreslení



← Kempeho řetězce

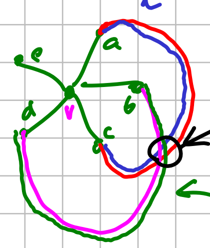
pokud v c' používají sousedé v max. 4 barvy, pak $\exists$ volná barva pro v. ✓

jinak: všichni sousedé mají různé barvy. Sestrojíme podgraf A: všechny vrcholy dosažitelné z a cestami přes vrcholy barev $c'(a)$, $c'(c)$

pokud $c \notin A$ [v podgrafu A prohodíme barvy ● ↔ ●
⇒ a je ● ⇒ ● se uvolnila pro v.

↳ jinak totéž s b ● a d ● a to už se nepokazí!

cesta z ● ● vrcholů



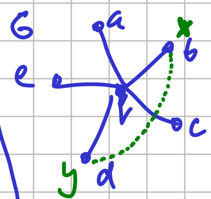
průsečík kružnic je vrchol dvou barev současně! ↯

← cesta z ● ● vrcholů

Dk #2 podobná indukce

jinak vyřešíme situaci s $\deg(v) = 5$.

G

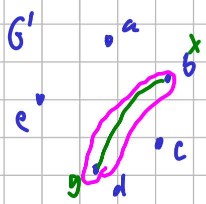


$\exists$ 2 sousedé x, y nespojení hranou (jinak bychom našli K_5)

$G' := G - v + \{x,y\}$ ← rovinný

obarvení grafu G, v němž x, y mají totéž barvu

G'



$G'' := G' . \{x,y\}$ ← rovinný

c''

IP

obarvení

máme volnou barvu pro v.

(TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI)

Pravděpodobnostní prostor

- Ω := množina elementárních jevů
- $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ množina jevů
  (lze definovat jako $\{\omega \in \Omega \mid \varphi(\omega)\}$)
- $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ pravděpodobnost

Příklady:

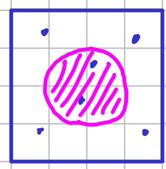
hod mincí
panna / vorel
$\Omega = \{P, V\}$
$\{P\}$ $\{V\}$ $\{P,V\}$ $\emptyset$

hod kostkou
1, 2, 3, 4, 5, 6
$\Omega = \{1, \dots, 6\}$
$\{1\}$
$\{2,4,6\}$
$\{1,2,3\}$

3 hody mincí
$\Omega = \{PPP, PPV, \vdots, VVV\}$
$\{PPP, PPV\}$

klasické

padá déšť na stolečku



$\Omega = [0,1]^2$

množiny bodů ve čtverci

Df: Diskrétní pravděpodobnostní prostor:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Ω: konečná nebo spočetná množina

$\mathcal{F}$: 2^{Ω}

$$P(J) = \sum_{\omega \in J} P(\{\omega\})$$

P jsou určeny pravd. elem. jevů

platí $P(\Omega) = 1$

↳ konečný p.p. : Ω je konečná

↳ klasický p.p. : platí všechny elem. jevy mají stejnou pp.

$$\Rightarrow P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|}$$