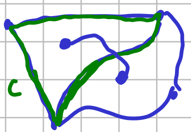
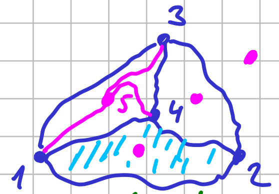


Kreslení do roviny

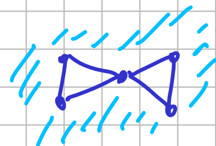
nakreslení grafu G je rovinný

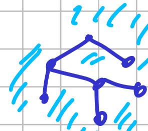
Věta (Jordanova o křivce): Je-li c topologická křivka v $\mathbb{R}^2$, pak $\mathbb{R}^2 \setminus c$ má právě 2 komponenty obloukové souvislosti: omezenou a neomezenou a c je jejich společnou hranicí.

Důsledek: K_5 není rovinný.

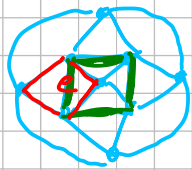


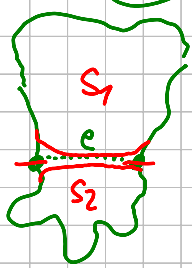
Podobně $K_{3,3}$ není rovinný.





Věta: Hranice každé stěny souvislého topol. grafu je nakreslením uzavřeného sledu.





Dk: indukcí podle #hran.

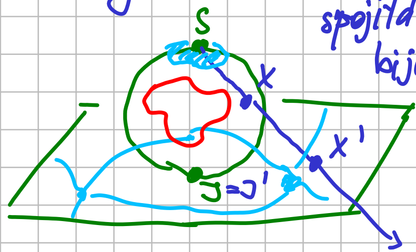
1. $|E| = |V| - 1$, graf je strom ✓
2. ind. krok: graf není strom

Nechť e je hrana na kružnici.
e odděluje 2 stěny S_1, S_2
Pro $G' := G - e$ věta platí,
oblast $S_1 \cup S_2$ je stěna
↳ je ohraničena uz. sledem,
ten rozdělíme na 2 části,
každou uzavřeme hranou e.

Kreslení na sféru (povrch koule)

Věta: Graf má nakreslení na sféru $\Leftrightarrow$ má nakreslení do roviny.

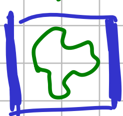
Dk: Stereografickou projekcí

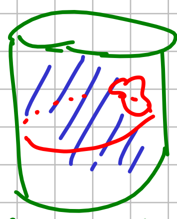


spojitá bijekce mezi sférou bez S a $\mathbb{R}^2$
obrazem nakreslení je opět nakreslení

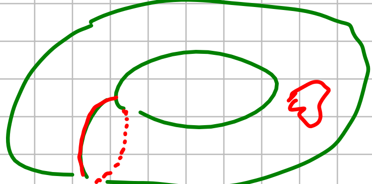
Důsledek: Vnější stěnu si lze zvolit.

Jiné plochy:



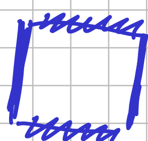


Válcová plocha (totéž jako rovina)

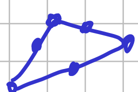


torus ("povrch pneumatiky")

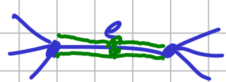
! jde nakreslit K_5 !

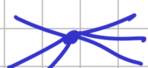


Dělení hran zachovává rovinnost, kontrakce : je-li G rovinný, pak G/e též:



K_5, $K_{3,3}$ nejsou rovinné, jejich dělení také ne





Věta (Kuratowského): Graf není rovinný $\Updownarrow$ obsahuje podgraf isomorfní nějakému dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

(zatím bez Dk.)

algoritmy na testování $O(n)$

G má rovinné nakreslení $\Leftrightarrow$ má nakreslení lomenými čarami $\Leftrightarrow$ má nakreslení úsečkami (!)

Věta (Eulerova formule): Je-li G souvislý graf nakreslený do roviny, $v = |V(G)|$, $e = |E(G)|$, $f =$ # stěn nakreslení, pak $v + f = e + 2$.

Dk: Indukcí podle e.

① G je strom: víme $v - 1 = e$
$v = e + 1$
$f = 1$: $v + f = v + 1 = e + 2$ ✓

② ind. krok: Nechť e je hrana na kružnici.
$G' := G - e$ ... parametry: $v' = v$, $e' = e - 1$, $f' = f - 1$
souvislý

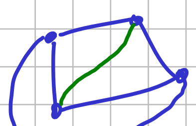
$\Downarrow$ IP

$v' + f' = e' + 2$
$v + f - \cancel{1} = e - \cancel{1} + 2$ ✓

Důsledek: Všechna nakreslení téhož grafu mají stejný # stěn.

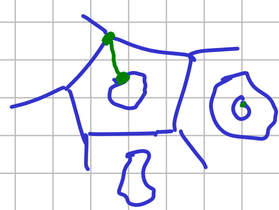
Df: G je maximální rovinný $\equiv$ G je rovinný & $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$: $G + e$ není rovinný.

Věta: V nakreslení max. rovinného grafu s min. 3 vrcholy jsou všechny stěny $\triangle$. rovinná triangulace

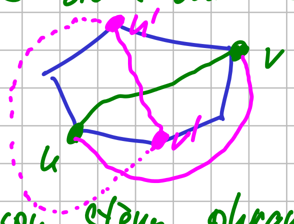


Dk: Nechť G je max. rovinný s nakreslením.

① kdyby G nebyl souvislý → lze přidat hranu ↯



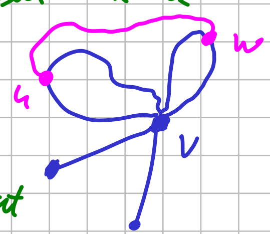
② kdyby $\exists$ stěna ohraničená C_n pro $n > 3$:

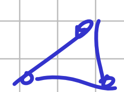


$u, v :=$ nesousední vrcholy stěny $\{u,v\} \notin E(G)$
přidáme hranu $\{u,v\}$ nakreslenou vnitřkem. ↯

③ jinak jsou stěny ohraničené uzavř. sledy .. ukážeme jednu takovou co nejsou kružnice

sled S, opakuje se na něm vrchol v:





$S - v$ má více komponent
$u, w :=$ vrcholy různých komponent
lze přidat hranu $\{u, w\}$ ↯

Pro triangulace z Eulerovy formule:

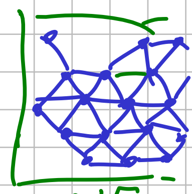
$v + f = e + 2$ $\qquad 3f = 2e$
$v + \frac{2}{3}e = e + 2$ $\qquad f = \frac{2}{3}e$
$v - 2 = \frac{1}{3}e$
$3v - 6 = e$

Věta: Nechť G je rovinný graf s aspoň 3 vrcholy, $v = |V(G)|$, $e = |E(G)|$.
Potom: $e \leq 3v - 6$.

Dk: Nechť G' je max. rovinný vzniklý z G přidáváním hran.
$\downarrow$ je Δace

$e \leq e' = 3v' - 6 = 3v - 6$ ✓

$e' \geq e$
$v' = v$

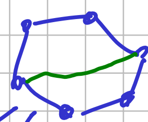


Důsledek: K_5 není rovinný: $v = 5$, $e = \binom{5}{2} = 10 > 9$!

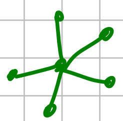
Důsledek: Průměrný stupeň vrcholu < 6. pro všechny rovinné grafy
Pro $v < 3$: triv.
Jinak: $\dfrac{\sum_w \deg(w)}{v} = \dfrac{2e}{v} \leq \dfrac{6v - 12}{v} < \dfrac{6v}{v} = 6$

Důsledek: V každém rovinném grafu $\exists$ vrchol stupně max. 5.

Rovinné grafy bez Δ pro $v \geq 3$



Maximální: stěny jsou C_4 nebo C_5
nebo

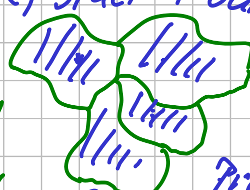


Euler: $4f \leq 2e$
$f \leq 1/2\, e$
$v + 1/2\, e \geq v + f = e + 2$
$v - 2 \geq e/2$
$\boxed{2v - 4 \geq e}$

① průměrný stupeň je < 4
② $\exists$ vrchol s $\deg \leq 3$
③ $K_{3,3}$ není rovinný:
$v = 6$
$e = 3^2 = 9 > 8$!

Barvení map

(1852) Stačí 4 barvy?



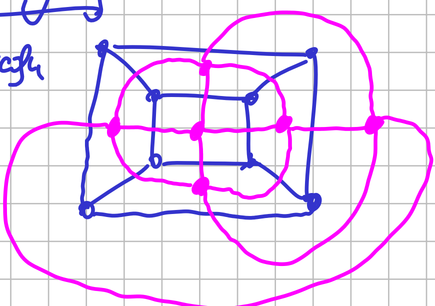
Problém 4 barev

sousední státy mají/mít různé barvy
sousední stěny topol. rovin. grafu

Chceme barvit vrcholy: $f: V \to \{1 \ldots k\}$
tak, aby $\{u,v\} \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

Duální graf

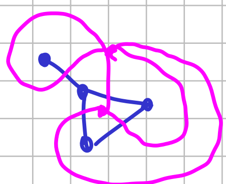
k topol. grafu

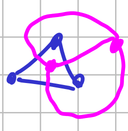


$G = (V, E)$
se stěnami F
$\downarrow$
$G^* = (F, E^*)$

$\{f_1, f_2\} \in E^*$
$\Updownarrow$
f_1, f_2 sousedí v G

e se zachová
$v \leftrightarrow f$





obecně definováno pro multigrafy

Cv: pokud G je souvislý multigraf,
pak $(G^*)^* \cong G$