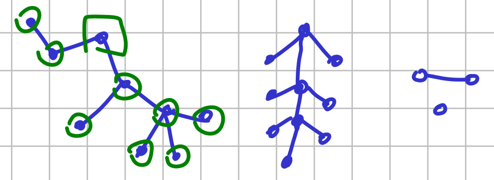
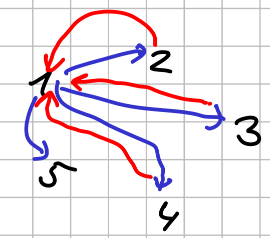
Df: Graf G je **strom** $\equiv$ G je souvislý & acyklický.
$v \in V(G)$ je **list** $\equiv$ $\deg_G(v) = 1$



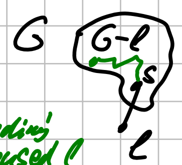
Víme: Je-li G strom na aspoň 2 vrcholech, G má aspoň 2 listy.
Je-li v list grafu G, pak: G je strom $\Leftrightarrow$ $G-v$ je strom.



Věta (o charakterizaci stromů):
Pro graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:
1. G je souvislý a acyklický.
2. $\forall u,v \in V(G)\ \exists!$ cesta mezi u,v v G — jednoznačně souvislý
3. G je souvislý a $\forall e \in E(G)$: $G-e$ není souvislý — minimálně souvislý
4. G je acyklický a $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$ $G+e$ obsahuje cyklus. — maximálně acyklický
5. G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$ — Eulerova formule

$G = (V, E)$

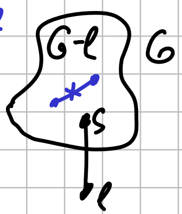
Dk: 1 ⇒ 2 Indukcí podle $|V|$ .... pro $|V| = 1$
Pro n: Každý graf s $|V| = n$ splňuje 1 ⇒ 2
Krok $n-1 \to n$: Buď G graf s n vrcholy.
Platí-li 1, G je strom ⇒ $\exists \ell$ list v G, s jediný soused ℓ
$G - \ell$ je také strom, má $n-1$ vrcholů
$\xRightarrow{IP}$ $G - \ell$ je jednoznačně souvislý
Jednoznačná souvislost G:
• nechť $u,v \in V$ → $u,v = \ell$ ✓



$u,v \neq \ell$
$G-\ell$ obsahuje právě jednu cestu, přidáním listu nevznikla nová ✓

BÚNO $u = \ell$, $v \neq \ell$
cesta $v \ldots \ell$ jde přes s
mezi v,s $\exists!$ cesta (z IP)
a tu jde rozšířit 1 způsobem.

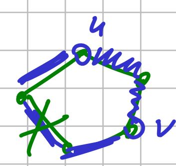
1 ⇒ 3 indukce



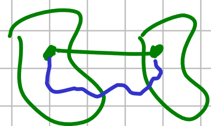
1 ⇒ 4 indukce

1 ⇒ 5 indukce pro $n=1$: $|V| = 1$, $|E| = 0$
$n-1 \to n$ $G-\ell$ má $n-1$ vrcholů, $n-2$ hran
⇒ G má n vrcholů, $n-1$ hran ✓
($n-1 \xrightarrow{+1} n$, $n-2 \xrightarrow{+1} n-1$)

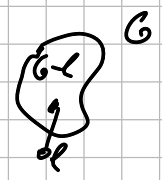
2 ⇒ 1 (!. souv. ⇒ souv. & acykl.)
obměna: ¬1 ⇒ ¬2 $\exists u,v \in V$ t.ž. $\nexists$ cest mezi u,v ≠ 1
není souv. nebo obsahuje cyklus



3 ⇒ 1 (min. souv.)
¬1 ⇒ ¬3 není souv.
nebo $\exists e \in E$: $G-e$ je souv. ✓



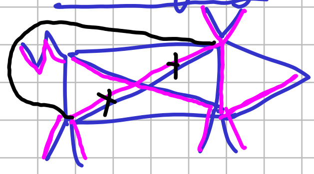
4 ⇒ 1 (max. acykl.)
¬1 ⇒ ¬4 obsahuje cyklus
nebo $\exists e$: $G+e$ je acyklický



5 ⇒ 1 (Eul. fle)
Je-li G souvislý a $|E| = |V| - 1$ ⇒ G je souv. a acykl.
Indukcí podle n: pro $\forall G$ s $|V| = n$: 5 ⇒ 1
Krok $n-1 \Rightarrow n$: vezmu graf G na n vrcholech splňující 5
podle Lemmatu $\exists \ell$ list v G
$G - \ell$ má $n-1$ vrcholů a splňuje 5
$\xRightarrow{IP}$ $G-\ell$ je strom ⇒ G je strom.

Lemma: 5 & $|V| \geq 2$ ⇒ $\exists \ell$ list
Dk: $\sum_{v \in V}^{n \text{ členů}} \underbrace{\deg(v)}_{\geq 1} = 2 \cdot |E| = 2n-2$
kdyby $\nexists$ list: $\forall v\ \deg(v) \geq 2$
byla by $\sum \geq 2n$ ↯

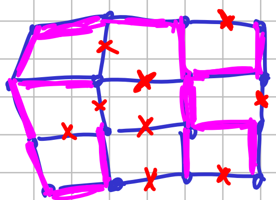
Kostra grafu



Df: $T \subseteq G$ je kostra grafu G ≡ T je strom & $V(T) = V(G)$.

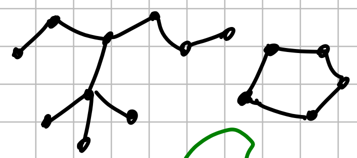
Větička: Graf má kostru ⇔ je souvislý.

Dk: ⇒ ✓ ⇐ Mažeme hrany na cyklech, dokud nebude strom.

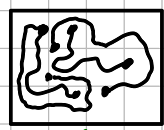


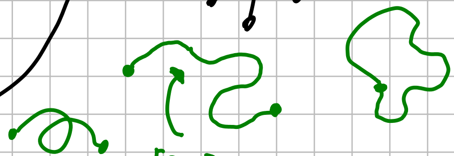
→ minimální kostra

Kreslení do roviny



$K_{3,3}$ nejde



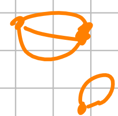


Df: Oblouk je zobrazení f z $[0,1]$ do $\mathbb{R}^2$ spojité prosté.
$f(0)$, $f(1)$: krajní body

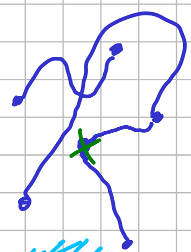
Df: Nakreslení grafu $G=(V,E)$ do roviny:

- vrcholům $v \in V$ přiřadíme body $b(v) \in \mathbb{R}^2$ ← navzájem různé
- hranám $e \in E$ přiřadíme oblouky $o(e)$ t.ž. je-li $e = \{u,v\}$, pak $b(u)$, $b(v)$ jsou krajní body oblouku $o(e)$
- $\forall v \in V\ \forall e \in E$: pokud $b(v) \in o(e)$, pak $v \in e$.
- $\forall e,f \in E$: pokud $o(e)$ a $o(f)$ mají spol. bod, pak to je jejich krajní bod.

Multigrafy: smyčky kreslím jako topolog. kružnice

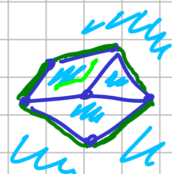


Df: Topologická kružnice je spojité zobrazení $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, které je prosté vyjma $f(0)=f(1)$.



Nakreslení cesty je oblouk
kružnice je topol. kružnice

Df: Topologický graf ≡ graf + jeho nakreslení

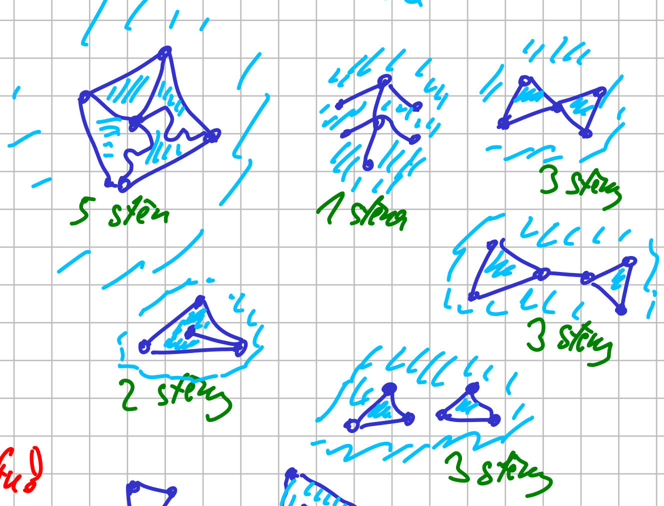


Df: $X \subseteq \mathbb{R}^2$ je obloukově souvislá ≡ $\forall x,y \in X$ $\exists$ oblouk $\subseteq X$ s krajními body x,y.

→ relace dosažitelnosti, to je ekvivalence
→ ekviv. třídy → komponenty oblouk. souvislosti

Df: Stěny nakreslení ≡ komp. oblouk. souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{e \in E} o(e)$

↑ Vlastnost nakreslení, ne samotného grafu!



Df: Graf je rovinný ≡ má nějaké rovinné nakreslení.

2 nakreslení téhož grafu lišící se strukturou stěn