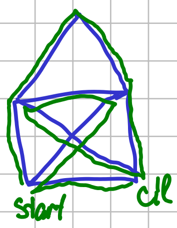
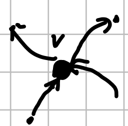


sled → tah → cesta

Df: Eulerovský tah je takový, který obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu.

Df: Graf je eulerovský ≡ existuje v něm uzavřený eulerovský tah.



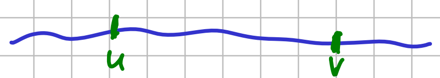
všechny stupně sudé

souvislý

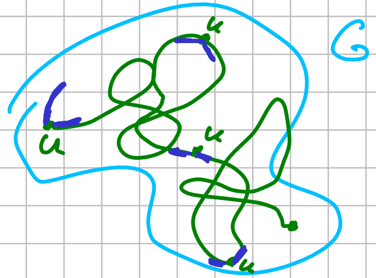
Věta: Graf G je eulerovský $\Leftrightarrow$ G je souvislý & $\forall v \in V(G)$: $\deg_G(v)$ je sudý.

Dk: $\Rightarrow$ ✓ souvislost $\forall u,v \in V(G)$ $\exists$ tah mezi u,v $\Downarrow$ $\exists$ cesta mezi u,v ✓

$\Leftarrow$ uvažme $T :=$ nejdelší tah

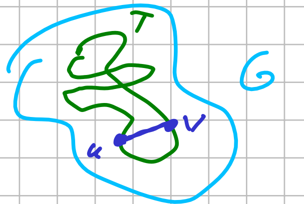


① T je uzavřený: Sporem: kdyby nebyl uzavřený
- nechť u je jeden z konců tahu
- tah obsahuje lichý # hran incidentních s u
- u má sudý deg $\Rightarrow$ $\exists$ nepoužitá hrana e incid. s u
- T lze prodloužit o e $\Rightarrow$ $\exists$ delší tah ↯

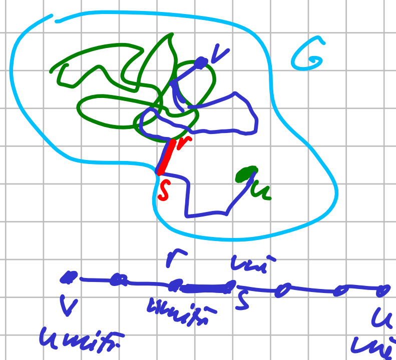


② T je eulerovský

ⓐ pokud $\{u,v\} \in E(G)$, $u,v \in T$, pak $\{u,v\} \in T$
- kdyby to pro nějaké u,v nebyla pravda ...
- T "rozpojíme" při některém z průchodů u:
  $u, \ldots\ldots\ldots, u$
- na konec přidáme $\{u,v\}, v$ $\rightarrow$ delší tah ↯



ⓑ T obsahuje všechny vrcholy
- kdyby $\exists u \in V(G)$ & $u \notin T$:
- zvolme $v \in T$ libovolně
- souvislost G $\Rightarrow$ $\exists$ cesta C mezi u,v
- $\exists r,s \in C$: $r \in T$, $s \notin T$, $\{r,s\} \in E(G)$
- T rozpojíme v r a prodloužíme $\{r,s\}, s$
  $\rightarrow$ delší tah ↯



Cvičení: G obsahuje otevřený eul. tah $\Leftrightarrow$ G je souvislý & právě dva vrcholy mají lichý stupeň

Pro multigrafy – násobné hrany
– smyčky ∞ do $\deg(v)$ přispějí 2×
} věta stále platí

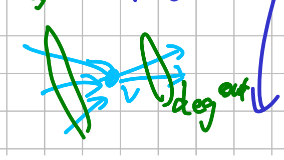
Orientované grafy

$E \subseteq V^2 \setminus \underbrace{\{(x,x) \mid x \in V\}}_{\text{bez smyček}}$

– sledy, tahy, cesty, kružnice jsou orientované

$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n$

– matice sousednosti už nemusí být symetrická

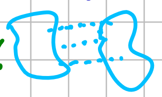


Df: Pro orientovaný graf $G = (V,E)$: podkladový graf $G^0 = (V, E^0)$, kde $\{u,v\} \in E^0 \equiv (u,v) \in E \vee (v,u) \in E$.

Df: $\deg^{in}(v) := \#u : (u,v) \in E$, $\deg^{out}(v) = \#w : (v,w) \in E$
vstupní stupeň, výstupní stupeň

Souvislost → "drží pohromadě" → slabá souvislost

pro neorient. totéž

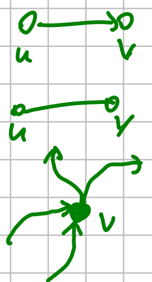


Df: Podkladový graf je souvislý.

→ 2 velké komponenty

Souvislost → "dosažitelnost všude" → silná souvislost

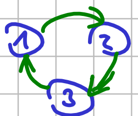
Df: $\forall u,v \in V$ $\exists$ orientovaná cesta z u do v



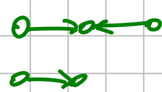
Df: Graf je vyvážený $\equiv$ $\forall v \in V$ $\deg^{in}(v) = \deg^{out}(v)$

Věta: Následující vlastnosti orientovaného grafu G jsou ekvivalentní:

1. G je vyvážený a slabě souvislý
2. G je eulerovský
3. G je vyvážený a silně souvislý



polosouvislý G: $\forall u,v \in V(G)$ $\exists$ cesta z u do v nebo z v do u



Dk: 3 ⇒ 1 ✓

2 ⇒ 3 vyváženost ✓

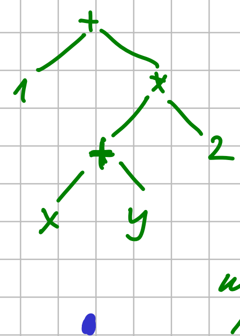
silná souvislost: $\forall u,v$ $\exists$ orien. tah $u \to v$

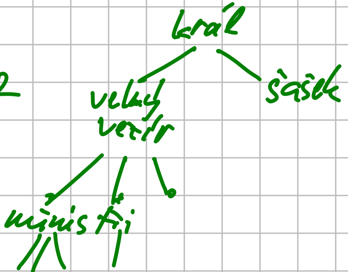
⇒ $\exists$ orient. cesta $u \to v$

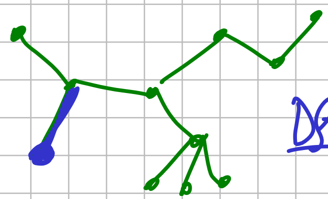
1 ⇒ 2 lehce upravíme důkaz pro neorientované.

STROMY

$1 + (x+y) * 2$







Df: Strom je souvislý graf bez kružnic. (acyklický)

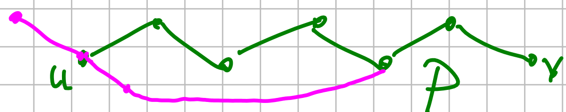
Les je acyklický graf.

List je vrchol stupně 1.

Lemma (o koncovém vrcholu):

Každý strom s aspoň 2 vrcholy má aspoň 2 listy.

Dk: Uvažme nejdelší cestu P ve stromu:



u,v jsou listy

Kdyby u nebyl list: $\exists t$ $\{t,u\}$ je hrana, která neleží na cestě.

$t \in P$: část cesty $u \dots t$ + $\{u,t\}$ tvoří cyklus ↯

$t \notin P$: $t, \{u,t\}, P$ je delší cesta ↯

Lemma: Nechť v je list grafu G. Pak G je strom $\Leftrightarrow$ $G-v$ je strom.

Dk: ⇒

$G-v$ souvislý (pokud mezi $x,y \neq v$ $\exists$ cesta v G, pak leží i v $G-v$)

$G-v$ je acyklický: kdyby $C \subseteq G-v \subseteq G$, pak $C \subseteq G$. (kružnice)

⇐ G souvislý: $\forall x,y \neq v$ $\exists$ cesta v $G-v$, ale ta je i v G

cesty $x - v$: nechť $s :=$ soused v

$\left.\begin{array}{l}\forall x \; x \sim s \\ \& \; s \sim v\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{tranz.}} x \sim v$

G acyklický: v má $\deg = 1$ ⇒ neleží na žádné kružnici