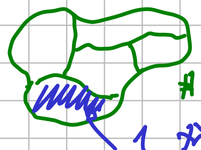
$V := \{1 - n\}$ # grafů $(V,E) = |2^{\binom{V}{2}}| = 2^{\binom{n}{2}}$

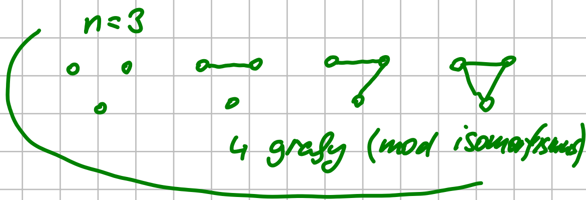
$E \subseteq \binom{V}{2}$



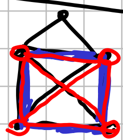
tříd isomorfismu $\ge \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$

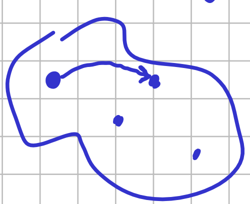
1 třída: max. n! grafů

$\sim n^2 - n\log n \le \log_2$ #neiso. grafů $\le \binom{n}{2} \sim n^2$



4 grafy (mod isomorfismu)





Df: Graf $G'=(V',E')$ je podgrafem grafu $G=(V,E)$

značíme $G' \subseteq G$

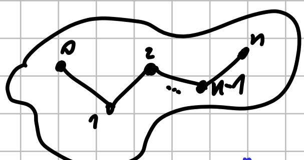
$\equiv V' \subseteq V$ & $E' \subseteq E$.

Df: $G'=(V',E')$ je indukovaným podgrafem grafu $G=(V,E)$

$\equiv V' \subseteq V$ & $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

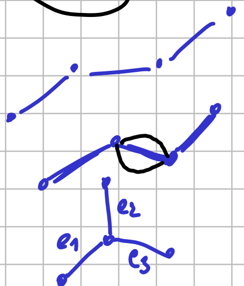
podgraf indukovaný množinou $V' \subseteq V$

$G[V']$



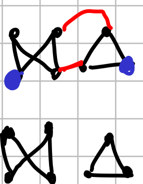
Df: **Cesta v grafu** $G=(V,E)$ je:

1. $G' \subseteq G$: $G' \cong P_n$ pro nějaké n ⇝ koncové vrcholy cesty
2. $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$, kde $v_0 - v_n$ jsou navzájem různé vrcholy, $e_1 - e_n$ jsou hrany, $\forall i\ e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$



Kružnice (cyklus) v grafu:

1. $G' \subseteq G$: $G' \cong C_n$ pro nějaké n
2. $(v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_0)$ $v_0 - v_{n-1}$ navzájem různé vrcholy, $e_0 - e_{n-1}$ hrany, $\forall i\ e_i = \{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}$



Df: Graf G je souvislý $\equiv$ $\forall u,v \in V(G)$ $\exists$ cesta v G s krajními vrcholy u,v.

Df: Dosažitelnost v G je relace na $V(G)$ t.ž. $u \sim v \equiv \exists$ cesta v G s krajními vrcholy u,v.

Lemma: Relace $\sim$ je ekvivalence.

Df: Komponenty souvislosti jsou podgrafy indukované třídami ekvivalence $\sim$.

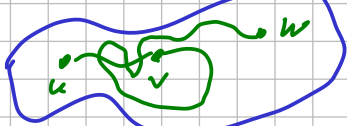
komponenty jsou souvislé

graf je souvislý $\Leftrightarrow$ má 1 komponentu

Dk lemmatu: Refl.: $u \sim u$ (existuje triv. cesta) ✓

Sym. $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$ ✓

Trans. $u \sim v$ & $v \sim w \Rightarrow u \sim w$



sled (walk) .... $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ $\forall i\ e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

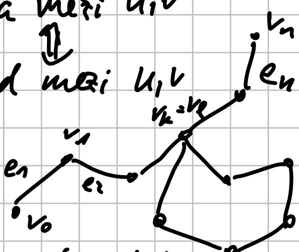
tah — neopakují se hrany

cesta ... ani vrcholy

Lemmátko: $\exists$ cesta mezi u,v $\Updownarrow$ $\exists$ sled mezi u,v

Dk: $\Downarrow$ triv.

$\Uparrow$ uvažme sled S

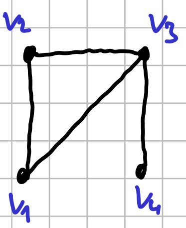


- kdyby se v S neopak. vrcholy, je to cesta
- pokud $v_k = v_l$, $k < l$

$v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k, e_{k+1}, \dots, e_l, v_l, e_{l+1}, \dots, e_n, v_n$

$v_0, e_1, \dots, e_k, v_k = v_l, e_{l+1}, \dots, e_n, v_n$ je také sled $v_0 \rightsquigarrow v_n$ a je kratší

opakujeme, dokud S není cesta.



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice sousednosti $A(G)$ grafu G

Matice $n \times n$ nul a jedniček při očíslování vrcholů v_1 — $v_n \in V(G)$

$$A_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{jinak} \\ 1 & \text{pokud } \{v_i, v_j\} \in E(G) \end{cases}$$

$$[\varphi] := \begin{cases} 0 & \varphi \text{ neplatí} \\ 1 & \varphi \text{ platí} \end{cases}$$

$$[\varphi \,\&\, \psi] = [\varphi] \cdot [\psi]$$

$$A_{ij} := [\{v_i, v_j\} \in E]$$

A je symetrická

součty řádků / sloupců jsou stupně vrcholů

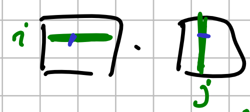
$$A^2_{ij} = (A \cdot A)_{ij} = \sum_k A_{ik} \cdot A_{kj} = \sum_k \underbrace{[\{v_i, v_k\} \in E] \cdot [\{v_k, v_j\} \in E]}$$

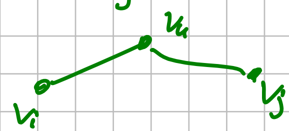
[$\{v_i, v_k\}$ a $\{v_k, v_j\}$ jsou hrany]

[∃ sled délky 2 z v_i do v_j přes v_k]

= # sledů délky 2 z v_i do v_j

$$(X \cdot Y)_{ij} := \sum_k x_{ik} \cdot y_{kj}$$





Lemma: A^t_{ij} = # sledů délky t z v_i do v_j

Dk: Indukcí podle t:

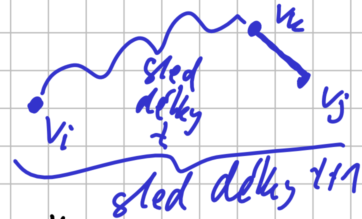
① $t = 1$ ✓

② $t \to t+1$

$[\{v_k, v_j\} \in E]$

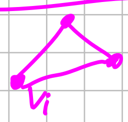
$$A^{t+1}_{ij} = (A^t \cdot A)_{ij} = \sum_k A^t_{ik} A_{kj} = \sum_{\substack{k \\ \{v_k, v_j\} \in E}} \text{\# sledů délky } t \text{ z } v_i \text{ do } v_k = \text{\# sledů délky } t{+}1 \text{ z } v_i \text{ do } v_j$$

sledů délky t z v_i do v_k



△ v grafu

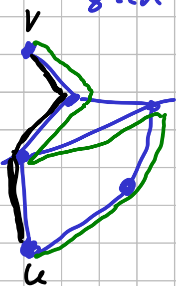
uzavřený sled délky 3 je △



A^3_{ii} = # sledů délky 3 z v_i do v_i

$$\# \triangle = \frac{\sum_i A^3_{ii}}{6}$$

Cv: # 4-cyklů

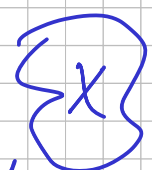


Vzdálenost (grafová metrika) v souvislém grafu G.

$$d_G : V^2 \to \mathbb{N}$$

$d_G(u,v)$:= min. z délek všech cest mezi u, v.

délek ← # hran



$d : X^2 \to \mathbb{R}^+_0$

Lemma: $\forall u, v, w \in V(G)$

① $d(u,v) \geq 0$

② $d(u,v) = 0 \iff u = v$

③ $d(u,v) = d(v,u)$

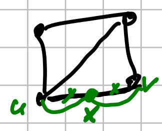
④ △ nerovnost:
$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Grafové operace

nechť $G=(V,E)$

$G+v+\{u,v\}$

- $G+v$, $G+e$ ... přidání vrcholu či hrany
- $G-v$, $G-e$ ... smazání $G-v = G[V(G)\setminus\{v\}]$

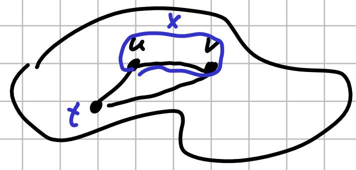


- $G\%e$ ... dělení hrany

  ↳ (V',E') $V' := V \cup \{x\}$ pro $x \notin V$

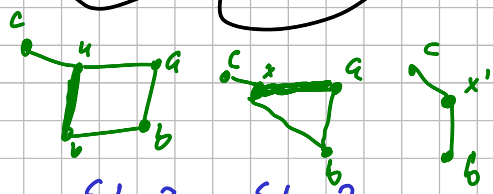
  $E' := E \setminus \{\{u,v\}\} \cup \{\{u,x\},\{v,x\}\}$

$G\%e = G + x - e + \{u,x\} + \{v,x\}$



- $G.e$ ... kontrakce hrany $e=\{u,v\}$

$$G.e = G - u - v + x + \underbrace{(e \setminus \{u,v\} \cup \{x\})}_{\text{pro všechny } e\in E \text{ t.ž. } |e\cap\{u,v\}|=1}$$



$\{t,u\} \to \{t,x\}$

cesty jde vyrábět postupným dělením P_1

kružnice C_3