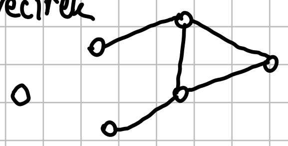
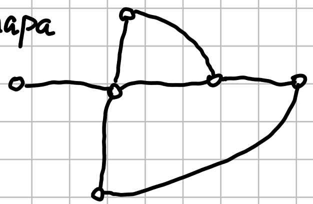
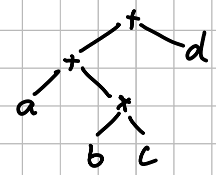
večírek



mapa

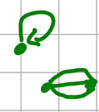


výraz $a+b*c+d$



G
$V(G)$
$E(G)$

Rozšíření:
- orientované
- se smyčkami
- multigrafy
- nekonečné



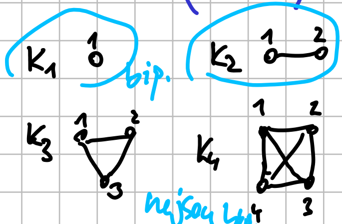
Df: Graf je uspořádaná dvojice (V,E), kde:
- V je konečná neprázdná množina vrcholů (vertices)
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran (edges)

"zoo grafů"

Úplný graf K_n

$V(K_n) := \{1 \ldots n\}$

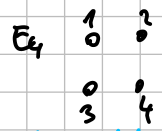
$E(K_n) := \binom{V(K_n)}{2}$



Prázdný graf E_n

$V(E_n) := \{1 \ldots n\}$

$E(E_n) := \emptyset$

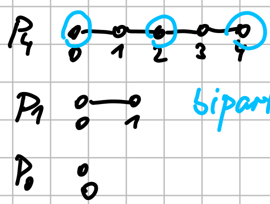


bipartitní

Cesta P_n (path)

$V(P_n) := \{0 \ldots n\}$

$E(P_n) := \{\{i, i+1\} \mid 0 \le i < n\}$

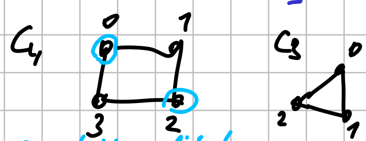


bipartitní

Kružnice (cyklus) C_n $n \ge 3$

$V(C_n) := \{0 \ldots n-1\}$

$E(C_n) := \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \le i < n\}$

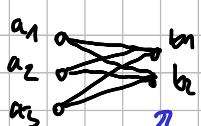


sudé bipartitní
liché ne

Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

$V(K_{m,n}) := \{a_1 \ldots a_m\} \cup \{b_1 \ldots b_n\}$

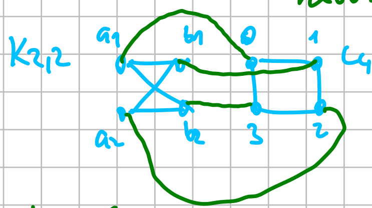
$E(K_{m,n}) := \{\{a_i, b_j\} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$



partity

Df: Graf G je bipartitní $\equiv$ $\exists$ rozklad množiny $V(G)$ na X, Y (partity)
t.ž. $E(G) \subseteq \{\{x,y\} \mid x \in X, y \in Y\}$

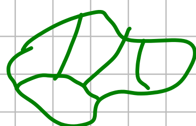
nebo: $\forall e \in E(G): |e \cap X| = 1$ & ~~$|e \cap Y| = 1$~~

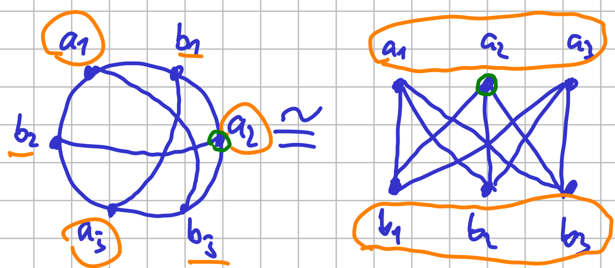


$K_{2,2} \cong C_4$

Df: Grafy G a H jsou isomorfní (značíme $G \cong H$)
$\equiv \exists f: V(G) \to V(H)$ bijekce
t.ž. $\forall u,v \in V(G): (\{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H))$

Na libovolné množině grafů je $\cong$ ekvivalence.



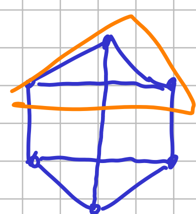


9 hran
skóre 3,3,3,3,3,3

$\not\cong K_5$

$\not\cong K_6$

$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ hran



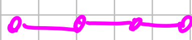
6 vrcholů
9 hran

Df: Stupeň vrcholu v v grafu G je
$\deg_G(v) := |\{u \in V(G) \mid \{u,v\} \in E(G)\}|$

Df: Skóre grafu G je posloupnost stupňů všech vrcholů (až na uspořádání)

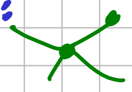
Df: Graf G je k-regulární (pro $k \in \mathbb{N}$)
$\equiv \forall v \in V(G): \deg_G(v) = k$.

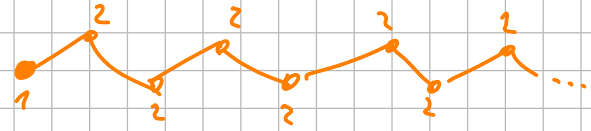
Df: Graf G je regulární $\equiv$
$\exists k$: G je k-regulární.



skóre 1, 2, 2, 1
1, 1, 2, 2

Větička: Pro každý graf (V,E) platí:
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$





Důsledky: $\sum_v \deg(v)$ je sudé číslo
$\Downarrow$
$(\#v \in V$ lichého stupně$)$ je sudý

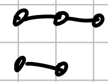
} princip sudosti

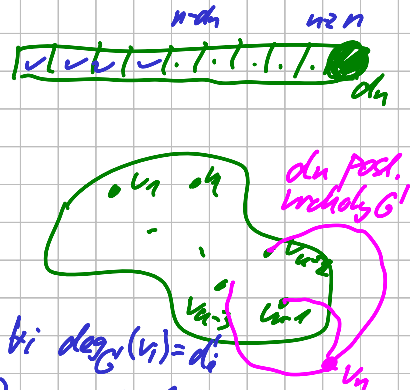
$0, 1, 1, 1, 1, 2$

$0, 3$ není

Věta o skóre: Posloupnost $D = d_1 \leq \ldots \leq d_n$ pro $n \geq 2$ je skóre grafu
$\Leftrightarrow$ $D' = d_1' \ldots d_{n-1}'$ je skóre grafu & $0 \leq d_n \leq n-1$.

$$d_i' := \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n \end{cases}$$





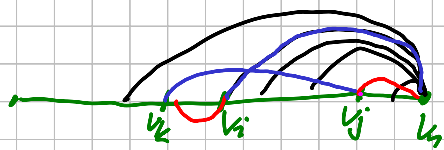
Dk: $\Leftarrow$ nechť G' je graf se skóre D' a vrcholy $v_1 \ldots v_{n-1}$ t.ž. $\forall i$ $\deg_{G'}(v_i) = d_i$
Vytvořím G doplněním vrcholu v_n a hran $\{v_i, v_n\}$ pro $i \in \{n-d_n, \ldots, n-1\}$
$\hookrightarrow$ G má skóre D.

$\Rightarrow$ **Lemma:** Nechť $\mathcal{G}$ je množina všech grafů se skóre D na vrcholech $\{1 \ldots n\}$, $\mathcal{G} \neq \emptyset$.
Potom $\exists G \in \mathcal{G}$: $\{v_n, v_i\} \in E(G)$ pro všechna $i \in \{n-d_n, n-1\}$ $(*)$

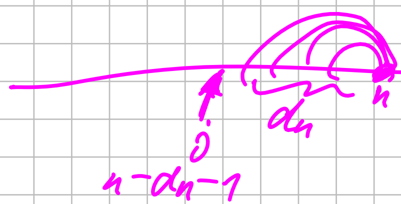
$\Rightarrow$ mohu odpojit v_n a získám graf G' se skóre D'

Dk: pro $G \in \mathcal{G}$ def. $j(G) := \max\{j \mid \{v_j, v_n\} \notin E(G)\}$
$\hookrightarrow$ když $j(G) = n - d_n - 1$ tak G splňuje $(*)$

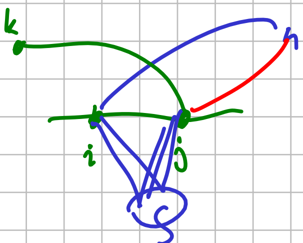
když $d_n = n-1$, pak každý $G \in \mathcal{G}$ splňuje $(*)$



Najdeme $G \in \mathcal{G}$, jehož $j(G)$ je minimální.
Sporem: když $j(G) > n - d_n - 1 \ldots$



$\{v_j, v_n\} \notin E(G)$
$\exists i < j : \{v_i, v_n\} \in E(G)$
$\exists k :$ $\{v_i, v_k\} \notin E(G)$, $\{v_j, v_k\} \in E(G)$ } protože $d_i \leq d_j$



Upravíme graf G na G_2: $V(G_2) := V(G)$
$E(G_2) := E(G) \cup \{\{v_i, v_k\}, \{v_j, v_n\}\} \setminus \{\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}\}$

Ale: $G_2 \in \mathcal{G}$ (má skóre D)
$j(G_2) < j(G)$ $\lightning$ spor s minimalitou $j(G)$ $\lightning$

$1, 1, 2, 2, 2, 2$ $\quad$ $0, 0, 1, 1$
$1, 1, 1, 1, 2$ $\quad$ $0, 0, 0$ $\quad$ $0, 0$ $\quad$ 0