$|N| = n$, $|M| = m$

$m \cdot (m-1)(m-2) \cdots = m^{\underline{n}}$

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n} = m^n$

$(y_1 - y_n) \in M^n \to$ velikost $|M|^n$

$y_i \in M$

Věta: $\# f: N \to M = m^n$ pro $|N| = n$, $|M| = m$, $m, n > 0$

→ **Dk** indukcí podle n.

① $n = 1$ $\quad \# f = m = m^1$

② $n \to n+1$

$(n+1)$-prvková N, m-prvková M

Zvolíme $x \in N$.

f je jednoznačně určena:

- $f(x)$ $\quad m \quad m$
- funkcí $f': \underbrace{N \setminus \{x\}}_{n} \to \underbrace{M \setminus \{f(x)\}}_{m-1}$

IP $\to m^n$ $\qquad$ IP $\to (m-1)^{\underline{n}}$

$\# f = m \cdot m^n = m^{n+1}$ $\qquad m \cdot (m-1)^{\underline{n}} = m^{\underline{n+1}}$

Věta: Je-li N n-prvková množina, pak $|2^N| = 2^n$.

Dk: $A \subseteq N$

$\updownarrow$ bijekce

$c_A: N \to \{0,1\}$ $\qquad c_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin A \\ 1 & \text{pro } x \in A \end{cases}$

charakteristická funkce

$\#$ podmnožin A $=$ $\#$ char. fcí $= 2^n$

Věta: Nechť $X \neq \emptyset$ je konečná množina,

$\mathcal{S} := \{S \subseteq X \mid |S| \text{ je sudá}\}$

$\mathcal{L} := \{L \subseteq X \mid |L| \text{ je lichá}\}$.

Potom $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$.

Dk: Víme, že $\mathcal{S} \cup \mathcal{L} = 2^X$.

Stačí $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$.

Sestrojíme $f: \mathcal{S} \to \mathcal{L}$ bijekci.

Zvolíme si $a \in X$.

$f(S) := S \,\Delta\, \{a\}$ $\qquad$ pokud $a \notin S$: přidáme a; pokud $a \in S$: odebereme a

① $f(S) \in \mathcal{L}$

② f má inverzi .... $f^{-1} = f$

$X = \{1,2\}$

$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{1,2\}\}$

$\mathcal{L} = \{\{1\}, \{2\}\}$

Věta: Nechť N je n-prvková, M je m-prvková.

Potom $\# f: N \to M$ prostých

$= \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-n+1)}_{n \text{ členů}}$ $\quad$ pro $n > m$ $= 0$

$m^{\underline{n}}$ "m na n klesající"

$[n] := \{0, \ldots, n-1\}$

$\# f: [n] \to [m] = m^{\underline{n}}$

Dk: ⊗

$\sum_{x \in A} x = a + \sum_{x \in A \setminus \{a\}} x$ $\quad a \in A$

$n! := \prod_{k=1}^{n} k$

$0! := \prod_{k=1}^{0} k = 1$

prázdný produkt

Kódování funkcemi:

- $X \to \{0,1\}$ ... 2^X
- $\{1,2\} \to X$ .... $(x,y) \in X^2$
- $\{1, \ldots, k\} \to X$ ... uspořádané k-tice ... X^k
- $\mathbb{N} \to X$ ... nekonečné posloupnosti prvků X $\quad x_i = f(i)$
- permutace na X : $f: X \to X$ bijekce
  $n = |X|$ $\qquad f: \{1, \ldots, n\} \to X$ ... lineární uspořádání na X

$\#$ perm. na X $=$ $\#$ prostých (bijekce) fcí z $\{1 \ldots n\} \to \{1 \ldots n\}$

$= n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n^{\underline{n}} = n!$ (faktoriál)

$0! = 1$

$m^{\underline{n}} := \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots (m-n+1)}_{n \text{ členů}} = \frac{m!}{(m-n)!}$

$100^{\underline{2}} = 100 \cdot 99 = 9900 = \frac{100!}{98!}$

$\#$ neuspořádaných k-tic z n-prvkové množiny N $\quad \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

k-prvkové podmnožiny $\qquad \# K \subseteq N : |K| = k$

$\#$ uspoř. k-tic $= n^k$

$\#$ uspoř. k-tic bez opakování $= n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \_ \cdot (n-k+1)$

dělíme $k!$

$N = \{1,2,3,4\}$

$n = 4$

$k = 3$

$\{1,2,4\}$

$\downarrow 3! = 6$

$(1,2,4)$ $(2,1,4)$ $(4,1,2)$

$(1,4,2)$ $(2,4,1)$ $(4,2,1)$

uspoř. 3-ce

$\#$ neusp. 3-ic $= \#$ usp. 3-ic$/6$

charakteristické funkce k-prvkových podmnožin

$\overbrace{0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1}^{n}$

právě k jedniček

Df: Kombinační číslo (binomický koeficient) $\binom{n}{k} := \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ „n nad k"

$|2^X| = 2^{|X|}$

Df: Pro množinu X a $k\geq 0$: $\binom{X}{k} := \{A\subseteq X \mid |A| = k\}$

Věta: Pro každou množinu X a $k\geq 0$: $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$

k-prvkových podmnožin

komb. číslo

Vlastnosti komb. čísel

1. $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{60}{6} = 10$
2. $\binom{n}{0} = 1$ $\qquad \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{1} = n$ $\qquad \binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
5. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

   k-prvkové z n-prvkové; k z n-1; k-1 z n-1

   $|X| = n$, $a\in X$

   $\binom{X}{k} \xrightarrow{\text{obsah. } a} \binom{X\setminus\{a\}}{k-1}$

   $\binom{X}{k} \xrightarrow{\text{neobs. } a} \binom{X\setminus\{a\}}{k}$
6. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Pascalův trojúhelník

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ . . . $\binom{3}{3}$

$\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$

k = n-1, k = n, $\binom{n}{k}$, k = 0, 1, 2, 3, 4

n=0 → 1

n=1 → 1 1

n=2 → 1 2 1

n=3 → 1 3 3 1

n=4 → 1 4 6 4 1

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Věta: (Binomická) pro $n\geq 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{} = \underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n} + y^n$$

→ členy typu $x^{n-i}y^i$ $\binom{n}{i}$ krát

$x^n y^0 + x^{n-1}y^1 + x^{n-2}y^2 \ldots + x^0 y^n$

$\binom{n}{2}$

Příklady:

1. $x = y = 1$: $\quad 2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$
2. $x = 1$, $y = -1$, $n\geq 1$: $\quad 0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$

   ↳ $|Y| = |Z|$