

Věta: $f: N \rightarrow M = m^n$
 pro $|N|=n, |M|=m$
 $m, n > 0$

Důk indukci podle n.
 ① $n=1 \quad \#f = m = m^1$
 ② $n \rightarrow n+1$
 $(n+1)$ -prvková N, m-prvková M
 zvolíme $x \in N$.
 f je jednorázově určena:
 • $f(x)$ m
 • funkce $f': N \setminus \{x\} \rightarrow M \setminus \{f(x)\}$
 IP $\hookrightarrow m^{n-1}$
 $\#f = m \cdot m^{n-1} = m^n$
 m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot m

Věta: Je-li N n-prvková množina
 pak $|2^N| = 2^n$

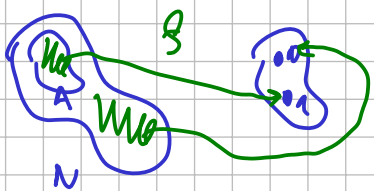
Věta: Množina $X \neq \emptyset$
 je konečná množina,
 $\mathcal{Y} := \{S \subseteq X \mid |S| \text{ je sudé}\}$
 $\mathcal{Z} := \{L \subseteq X \mid |L| \text{ je liché}\}$
 Potom $|\mathcal{Y}| = |\mathcal{Z}| = 2^{n-1}$

Důk: Víme, že $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} = 2^X$.
 Státí $|\mathcal{Y}| = |\mathcal{Z}|$.
 Sestrojíme $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ bijekci.
 zvolíme si $a \in X$.

$f(S) := S \Delta \{a\}$ průnik a S: přidáme a, průnik a S: odebereme a
 ① $f(S) \in \mathcal{Z}$
 ② f má inverzi ... $f^{-1} = f$

Důk: $A \subseteq N$
 \uparrow bijekce
 $\mathcal{C}_A: N \rightarrow \{0,1\}$ $\mathcal{C}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in A \\ 1 & \text{pro } x \notin A \end{cases}$
 charakteristická funkce
 $\# \text{ podmnožin } A = \# \text{ char. fct} = 2^n$

$(y_1, \dots, y_n) \in M^n \rightarrow$ velikost $|M|^n$
 $y_i \in M$



$X = \{1,2\}$
 $\mathcal{Y} = \{\emptyset, \{1,2\}\}$
 $\mathcal{Z} = \{\{1\}, \{2\}\}$

Věta: Množina N je n-prvková,
 M je m-prvková.
 Potom $\#f: N \rightarrow M$ prostých
 = $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m-n+1)$

m^n "m m n klasifikací"
 $[n] := \{0, \dots, n-1\}$
 $\#f: [n] \rightarrow [m] = m^n$

Důk: \oplus
 $\sum_{x \in A} x = a + \sum_{x \in A \setminus \{a\}} x$
 $n! = \prod_{k=1}^n k$
 $0! = \prod_{k=1}^0 k = 1$
 ↑
 průběžný produkt

Kódování funkcemi:

- $X \rightarrow \{0,1\} \dots 2^X$
- $\{1,2\} \rightarrow X \dots (x,y) \in X^2$
- $\{1, \dots, k\} \rightarrow X \dots$ uspořádané k-tice $\dots X^k$
- $\mathbb{N} \rightarrow X \dots$ nekonečné posloupnosti prvků X
 $x_i = f(i)$

permutace na X: $f: X \rightarrow X$ bijekce
 $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow X \dots$ lineární uspořádaná na X
 $\# \text{ perm. na } X = \# \text{ prostých fct } \tau: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$
 = $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \cdot 1 = n^n = n!$ (faktorial)
 $0! = 1$

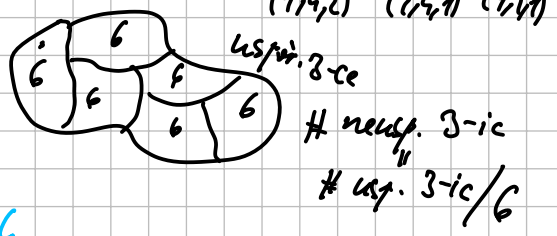
$m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$
 n členů

$100^2 = 100 \cdot 99 = 9900$
 $= \frac{100!}{98!}$

$\#$ neuspořádaných k-tic z n-prvkové množiny N $\frac{n^k}{k!}$
 \uparrow
 k-prvkové podmnožiny
 $\# K \subseteq N: |K|=k$

$\#$ uspoř. k-tic = n^k
 $\#$ uspoř. k-tic = $n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$
 bez opakování

dělitelne $k!$
 $N = \{1,2,3,4\}$
 $n=4$
 $k=3$
 $\{1,2,4\}$
 $\downarrow 3! = 6$
 $(1,2,4), (2,1,4), (4,2,1), (1,4,2), (2,4,1), (4,1,2)$



charakteristické funkce
 k-prvkových podmnožin
 0110110001
 právě k jedniček

Df: Kombinacní číslo $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

(binomický koeficient) n nad k

$|2^X| = 2^{|X|}$

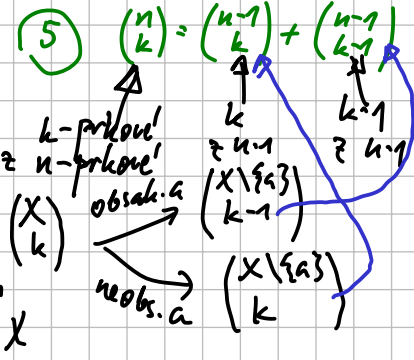
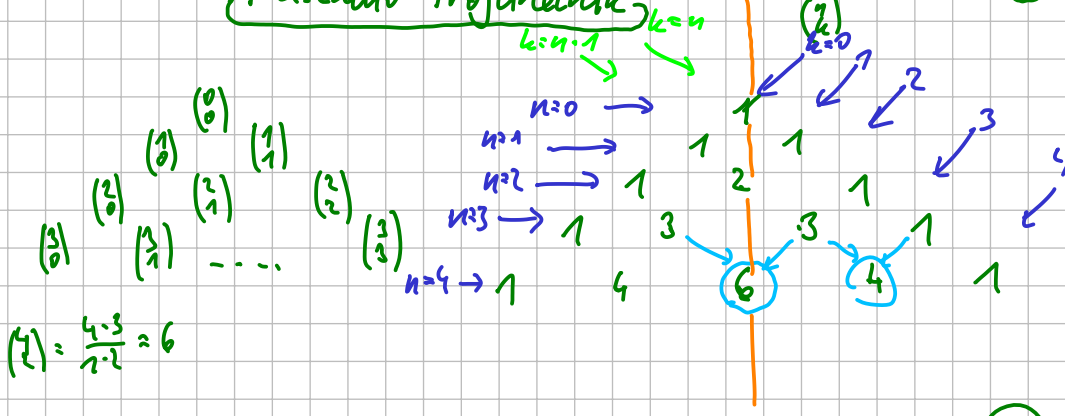
Df: Pro množinu X a $k \geq 0$: $\binom{X}{k} := \{A \subseteq X \mid |A|=k\}$

Věta: Pro každou množinu X : $\left| \binom{X}{k} \right| = \binom{|X|}{k}$
 a $k \geq 0$
 # k-prvkových podmnožin komb. číslo

Vlastnosti komb. čísel

- ① $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = 10$
- ② $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$
- ③ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{n-1} = n$
- ④ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Pascalův trojúhelník



⑥ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
 $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Věta: (Binomická) pro $n \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$

$(x+y)^n = (x+y)(x+y) \dots (x+y)$
 $= \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n + \dots + y^n$
 \rightarrow členy typu $x^{n-i} y^i$ krát $\binom{n}{i}$
 $x^n y^0 + x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + x^0 y^n$

Příklady: ① $x=y=1$

$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$

② $x=1, y=-1$
 $n \geq 1$

$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$
 $\hookrightarrow |y| = |z|$