R relace na množině X je:

- reflexivní = xRx
- symetrická = xRy <=> yRx   antisymetrická xRy & yRx jen pro x=y
- tranzitivní ≡ xRy & yRz => xRz

ekvivalence : refl. & sym. & tran.

Df: Relace R na množině X je (částečné) uspořádání ≡ R je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní.

Df: (částečně) Uspořádaná množina (ČUM) (X, R)

↖ uspořádání na X

≤ ≾ ⊴

Df: x,y ∈ X jsou porovnatelné ≡ xRy ∨ yRx

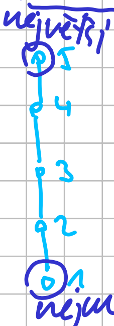
Uspořádání R je lineární ≡ ∀x,y∈X porovnatelné

Df: (X, ≤) ČUM ⟶ (X, <) $x<y \equiv x\le y$ & $x\ne y$

↑ ostrá nerovnost

ostré uspořádání

Hasseův diagram pro konečné ČUM

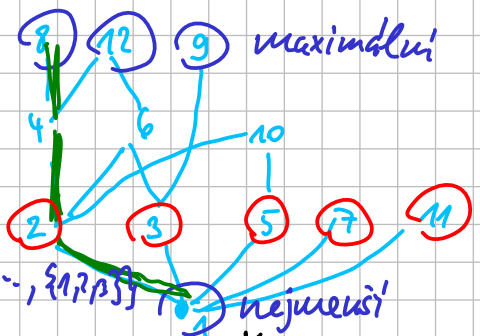


Df: x je bezprostředním předchůdcem y v uspořádání ≤ ≡

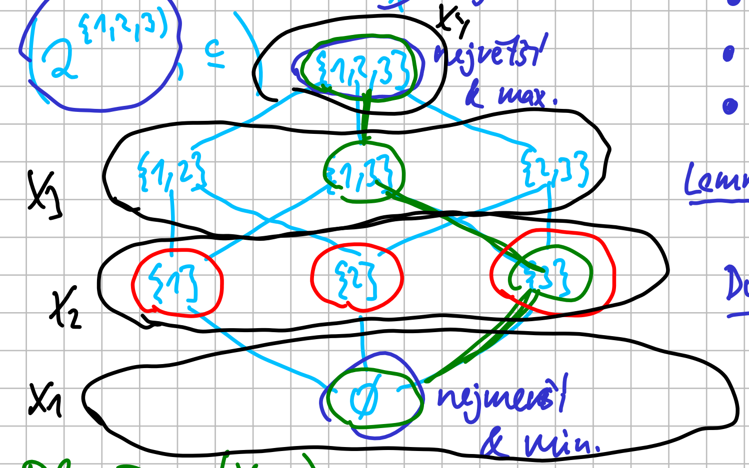
$x<y$ & $(\nexists z: x<z$ & $z<y)$

$x \lhd y$

dělitelnost {1 – 12}



{∅, {1}, {2}, …, {1,2,3}}



Příklady:

① (ℕ, ≤) lineární

② (ℚ, ≤) lineární

③ Δ_X

④ (ℕ⁺, \\) dělitelnost   x\\y

4,6 neporovnatelné

(ℤ∖{0}, \\) není uspoř.!   −1\\1, 1\\−1 není antisym.!

⑤ $(2^X, \subseteq)$ inkluze

pro X = {1,2,3} $A \subseteq A$

{1} ⊆ {1,3} $A\subseteq B, B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$

{1,2} {2,3} neporovnatelné

⑥ lexikografické uspořádání

(A, ≤) lineárně uspoř. množina (abeceda)

na A^2 def. $\le_{Lex}$

$(x_1,y_1) \le_{Lex} (x_2,y_2) \equiv x_1 < x_2 \lor (x_1 = x_2$ & $y_1 \le y_2)$

pro X = {a … z}

$(c,d) \le_{Lex} (e,a)$

$(c,d) \le_{Lex} (c,e)$

lineární

$(A^k, \le_{Lex})$

$(A^*, \le_{Lex})$

↑ konečné posloupnosti prvků z A

$x_1 - x_k \le_{Lex} y_1 - y_l$

=

∃p:

$x_1 = y_1$

⋮

$x_{p-1} = y_{p-1}$

$x_p \ne y_p$

↓

rozhodne pozice p

ab $\le_{Lex}$ abcd

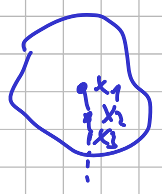
pokud 1 slovo je rozšířením druhého, tak kratší je menší než delší

Df: Pro (X, ≤) ČUM:

- x∈X je nejmenší ≡ ∀y∈X : x≤y
- x∈X je minimální ≡ ∄y∈X : y<x
- největší, maximální

Lemmátko: Každá konečná (neprázdná) ČUM má minimální prvek

Důkazík:



$x_1 \in X$ zvolíme libovolně

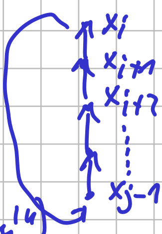
pokud x_1 není min., $\exists x_2 < x_1$

x_2 $x_3 < x_2$

⋮

x_k je minimální

$x_i = x_j$ pro $i<j$



$x_i > x_{i+1}$

$x_{i+1} > x_i$

není antisym.!

Df: Pro (X, ≤) ČUM:

- A⊆X je řetězec ≡ ∀a,b∈A a,b jsou porovnatelné
- A⊆X je antiřetězec (nezávislá množina) ≡ ∄ a,b různé & porovnatelné
- ω(X, ≤) := max. z délek řetězců ("výška uspořádání")
- α(X, ≤) := — " — antiřetězců ("šířka uspořádání")

Veta (O Dlouhém a Širokém): $\forall (X,\leq)$ $\overset{\text{konečná}}{\text{ČUM}}$: $\alpha(X,\geq)\cdot\omega(X,\geq) \geq |X|$ pokud $|X|=n$, pak $\alpha \geq \sqrt{n}$ nebo $\omega \geq \sqrt{n}$

Dk: Sestrojíme: $X_1 := \{x\in X \mid x \text{ je minimální}\}$

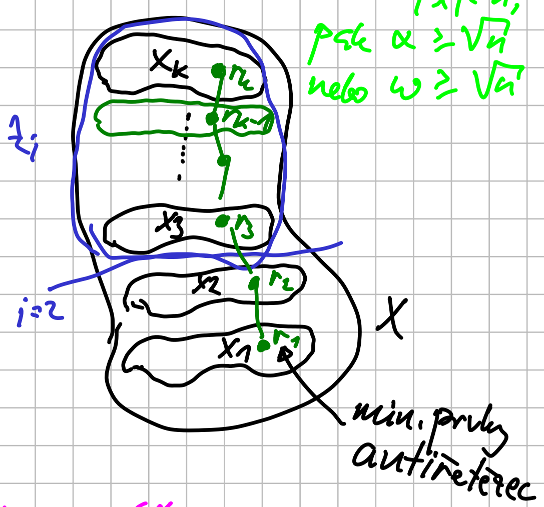
Když máme $X_1 — X_i$:

$$Z_i := X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i} X_j\right) \xrightarrow{\text{pokud } Z_i=\emptyset} \text{hotovo}$$

$\downarrow Z_i \neq \emptyset$

$$X_{i+1} := \{x\in Z_i \mid x \text{ je minimální v } Z_i\}$$

$\rightarrow X_1, X_2, —, X_k$



Přitom:

① $\forall i$ X_i je antiřetězec $\quad |X_i| \leq \alpha$

② $\{X_1 — X_k\}$ tvoří rozklad X $\quad \alpha\cdot\omega \geq \underbrace{\overset{\leq\alpha}{|X_1|} + — + \overset{\leq\alpha}{|X_k|}}_{\leq\omega} = |X|$

③ $\exists r_1\in X_1 — r_k\in X_k$ t.ž. $\{r_1 — r_k\}$ je řetězec $\quad k\leq\omega$ ← #vrstev

↑ proč: $r_k\in X_k$ zvolíme libovolně

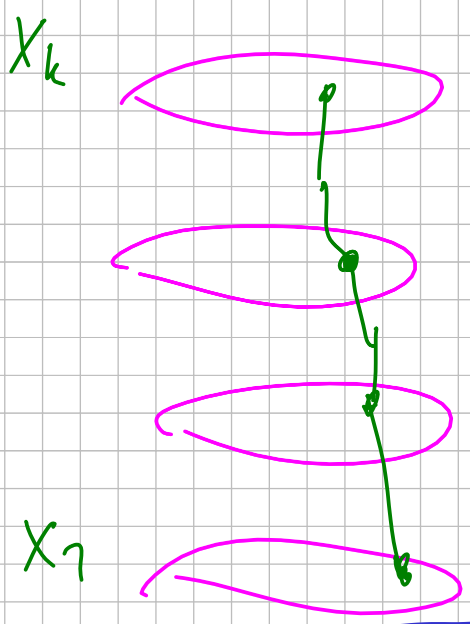
$r_k \notin X_{k-1} \Rightarrow \exists r_{k-1}\in X_{k-1}: r_{k-1} < r_k$

když máme $r_j, r_{j+1}, —, r_k$

$\exists r_{j-1}\in X_{j-1}: r_{j-1} < r_j$

→ až do r_1

Q.E.D.



R je řetězec

$\Rightarrow \forall i \; |R\cap X_i| \leq 1$

$\Rightarrow k \geq |R|$

$k \geq \omega$

$\equiv \qquad \Leftrightarrow$

$:= \qquad =$

Příště: Počítání (kombinatorické)

Kolik existuje funkcí z $\{1—a\}\to\{1—b\}$

#funkcí $= b^a$

podmnožin $\{1—n\}$

$= \#f: \{1—n\}\to\{0,1\}$

$= 2^n$